详细解答

STEP I 1996，第 9 题

力学 · 弹性绳与能量

STEP I 1996，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s1-q9

关键思路

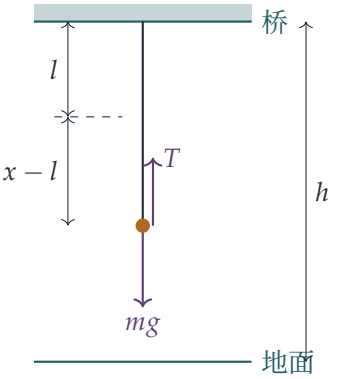
这一题从头到尾都是能量的问题。只有重力和绳的张力（tension）在作功，而两者都是守恒力（conservative force），所以我们根本不必完整地解运动方程（equation of motion）。“仅仅避过地面”的意思是：她到达地面的一刻，速率刚好为零。最大速率出现在加速度变号之处，也就是张力与她的重量互相平衡的位置。

解答

我们把跳跃者视为一个从桥上由静止出发的质点（particle），把绳视为轻绳并服从胡克定律（Hooke's law），同时忽略空气阻力。设 x 为她已下落的距离。当 $x \le l$ 时，绳是松弛的，她处于自由下落（free fall）状态。当 $x > l$ 时，伸长量（extension）为 $x - l$，由胡克定律得张力

$$T = \frac{mg}{k} \cdot \frac{x - l}{l},$$

而绳中储存的弹性势能（elastic energy）为 $\frac{mg}{k} \cdot \frac{(x-l)^2}{2l}$。



桥的高度

在最低点，她瞬间静止。她仅仅避过地面，所以这个最低点就是地面本身，即 $x = h$。显然 $h > l$：假如绳从未拉紧，她便会一直自由下落，并以相当的速率撞向地面。由离开桥面到最低点，动能（kinetic energy）在开始和结束时都是零，所以失去的重力势能全部转移到绳中：

$$mgh = \frac{mg}{k} \cdot \frac{(h-l)^2}{2l}.$$

两边乘以 $2kl/(mg)$，得 $2klh = (h-l)^2 = h^2 - 2hl + l^2$，所以

$$h^2 - 2hl(k+1) + l^2 = 0,$$

这正是所需的结果。由二次公式（quadratic formula），

$$h = l(k+1) \pm l\sqrt{(k+1)^2 - 1} = l\left(k+1 \pm \sqrt{k^2+2k}\right).$$

? **想一想** 我们要的是哪一个根？另一个根又为甚么会出现？

由于 $k > 0$，我们有 $\sqrt{k^2+2k} > \sqrt{k^2} = k$，所以取负号时会得出 $h < l(k+1-k) = l$。但能量方程假设了绳被拉长了 $h-l$，这只有在 $h > l$ 时才有意义。这个多余的根来自平方：对于一个绳实际上无法提供的“压缩”，它给出相同的 $(h-l)^2$ 值。（两根之积为 l^2，所以其中一个大于 l，另一个则小于它。）因此

$$h = l\left(k+1+\sqrt{k^2+2k}\right).$$

最大速率

绳仍然松弛时，她以 g 向下加速。绳一旦拉紧，沿向下方向应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg}{k} \cdot \frac{x-l}{l}.$$

当 $x - l < kl$ 时，此式为正，其后则为负。所以她一直加速，直至伸长量为 kl，即张力等于她的重量的那一点，此后便开始减速。因此她的最大速率在 $x = l + kl$ 处达到。由桥面到这一点应用能量守恒（conservation of energy），

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= mg(l+kl) - \frac{mg}{k}\cdot\frac{(kl)^2}{2l}\\ &= mgl(1+k) - \tfrac{1}{2}mgkl.\end{aligned}$$

乘以二再除以 m，

$$v^2 = 2gl + 2kgl - kgl = (k+2)gl,$$

这正是所需的结果。

验算

- 当 $k \to 0$ 时，绳变得非常硬。这时 $h \to l$（她几乎没有把绳拉长），而 $v^2 \to 2gl$，即下落距离 l 后的自由下落速率；这是合理的，因为绳几乎立刻把她停住。
- 随机选取 k 和 l，以数值方法逐步求解运动方程，所得的最低点和最大速率与公式吻合至小数点后五位。例如，$k = 1.5$、$l = 10\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 给出 $h = 10(2.5 + \sqrt{5.25}) \approx 47.9\,\mathrm{m}$ 和 $v^2 = 343$，所以 $v \approx 18.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。

常见错误

- 以为最大速率出现在绳刚拉紧的一刻。那时她仍在加速，因为张力为零。
- 计算弹性势能时，用了整段下落距离 x，而不是伸长量 $x - l$。
- 保留 h 的两个根，而没有检查是否 $h > l$。

STEP 之外

绳一旦拉紧，运动便是以平衡伸长量 kl 为中心的简谐运动（simple harmonic motion），所以下落的后半段是正弦曲线的一部分，角频率（angular frequency）为 $\sqrt{g/(kl)}$。像这样在自由下落与振子之间切换的分段系统，正好让人初步认识能量方法和相平面（phase plane）图像如何处理不光滑的力。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）在这个程度上仔细地阐述了能量守恒和振动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。