详细解答

STEP I 1996，第 8 题

纯数学 · 循环小数

> **STEP I 1996，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q8

关键思路

循环的数字节其实是一个乔装了的等比级数（geometric series）：每重复一次，数字节就比上一次向右移 k 个位，亦即乘以 10^{-k}。第 (i) 部分是最简单的情况。在第 (ii) 部分，我们把展开式分成开始循环之前的部分（一个有限小数）和循环的尾段（一个等比级数），结果两部分都是整数除以十的幂或除以 $10^k - 1$。

解答

第 (i) 部分

数字节 38 每两个位重复一次，所以

$$\begin{aligned} 0.383838\ldots &= \frac{38}{100} + \frac{38}{100^2} + \frac{38}{100^3} + \cdots \\ &= \frac{38/100}{1 - 1/100} = \frac{38}{99}, \end{aligned}$$

这里把公比（ratio）为 $\frac{1}{100}$ 的等比级数求和；由于 $|\frac{1}{100}| < 1$，这样做是容许的。因为 $38 = 2 \times 19$ 与 $99 = 3^2 \times 11$ 没有公共的质因数（prime factor），所以这已是最简分数（lowest terms）：

$$0.383838\ldots = \frac{38}{99}.$$

第 (ii) 部分

（题目印出的展开式 $0 \cdot a_1 a_2 a_2 \cdots$ 是 $0 \cdot a_1 a_2 a_3 \cdots$ 之误。）每个 a_n 都是 0 至 9 的数字，而

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

我们在 $n = N$ 处把这个和分开。

首 N 个数字。 设 b 为十进制数字依次是 $a_1 a_2 \ldots a_N$ 的整数（容许开首有零），即

$$b = \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{N-n}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} = \frac{1}{10^N} \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{N-n} = \frac{b}{10^N}.$$

尾段。 条件 $a_{n+k} = a_n$ 对所有 $n > N$ 成立，反复运用它，可得对所有 $m \geq 0$ 及 $1 \leq j \leq k$ 都有 $a_{N+mk+j} = a_{N+j}$（对 m 用归纳法（induction）：下标 $N + (m-1)k + j$ 大于 N，所以可以给它加上 k）。因此在第 N 个位之后，展开式就是数字节 $a_{N+1} a_{N+2} \ldots a_{N+k}$ 不断重复。设 c 为由这些数字组成的整数，

$$c = \sum_{j=1}^{k} a_{N+j} 10^{k-j}.$$

把尾段每 k 项分成一组；由于所有项均为非负，而且级数收敛（converges），这样分组是容许的。对给定的 $m \geq 0$，相应的一组是

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{N+mk+j}}{10^{N+mk+j}} = \frac{1}{10^{N+(m+1)k}} \sum_{j=1}^{k} a_{N+j} 10^{k-j} = \frac{c}{10^N} \left(\frac{1}{10^k} \right)^{m+1}.$$

? **想一想** 为甚么每一组恰好是前一组的 10^{-k} 倍?

由第 m 组到第 $m+1$ 组，所用的数字相同（因为有周期性（periodicity）），但每个数字都向右多移了 k 个位，于是每一项都除以 10^k。这就是隐藏在循环小数（recurring decimal）里的等比级数。

把公比为 $10^{-k} < 1$ 的等比级数求和，

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{c}{10^N} \cdot \frac{10^{-k}}{1 - 10^{-k}} = \frac{c}{10^N (10^k - 1)}.$$

把各部分合起来。 把两部分相加，

$$x = \frac{b}{10^N} + \frac{c}{10^N (10^k - 1)},$$

其中 b 是由首 N 个数字 $a_1 \ldots a_N$ 组成的整数，c 是由一个周期 $a_{N+1} \ldots a_{N+k}$ 组成的整数。这就是题目要求的形式。

有理性。通分后，

$$x = \frac{b(10^k - 1) + c}{10^N(10^k - 1)}.$$

分子是整数，而由于 $k \geq 1$ 可得 $10^k - 1 \geq 9$，分母是正整数。所以 x 是两个整数之比，即 x 是有理数（rational）。

验算

- 第 (i) 部分是没有循环前部分（pre-period）而 $k = 2$、$c = 38$ 的情况：公式给出 $38/(10^2 - 1) = 38/99$。（若取 $N = 1$，则 $b = 3$ 及 $c = 83$，而 $\frac{3}{10} + \frac{83}{990} = \frac{380}{990} = \frac{38}{99}$，结果一致。）
- 取 $0.12345345\ldots$，其中 $N = 2$、$k = 3$、$b = 12$、$c = 345$：$\frac{12}{100} + \frac{345}{100\times 999} = \frac{4111}{33300} = 0.1234534534\ldots$
- 我们还随机选取了 500 组循环前部分和循环节，以精确算术把公式与展开式求和的结果比较；全部一致。

常见错误

- 忘记尾段的因子 10^{-N}：循环节由第 $N+1$ 个位开始，而不是由第 1 个位开始。
- 分母用了 10^k 而不是 $10^k - 1$：等比级数的首项是 $c\,10^{-N-k}$，而不是 $c\,10^{-N}$。
- 在 (i) 中没有检查是否最简分数：要说明为甚么 $\gcd(38, 99) = 1$。

STEP 之外

逆命题（converse）也成立：每个有理数的小数展开式最终都会循环，因为用 q 作长除法（long division）时只有 q 个可能的余数，所以其中一个必定重复出现。因此，无理数（irrationals）正是小数展开式永不进入循环的那些实数。$1/q$ 的周期长度与 10 模 q 的阶（order）有关，这是初尝群论（group theory）在数论中的滋味。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算术）把这些关于同余（congruences）和周期的想法阐述得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。