详细解答

STEP I 1996，第 7 题

纯数学 · 一阶微分方程

> **STEP I 1996，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q7

关键思路

“以与水量成正比的速率流出”可以直接写成一条一阶微分方程（first-order differential equation）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky$，其中 $k > 0$，其解是一个指数函数（exponential）。把 e^{-k} 记作单一个数 b，指数函数便化为 b^t；同一个代换 $k = -\ln b$ 亦可用来改写第 (ii) 部分的方程。该方程是线性的，所以用积分因子（integrating factor）便可完成。

解答

第 (i) 部分

水是流出的，所以 y 以与 y 成正比的速率减少：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky \qquad \text{其中常数} k > 0.$$

只要水箱内仍有水，便有 $y > 0$，所以可以分离变量（separate the variables）：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int k\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \ln y = -kt + c.$$

当 $t = 0$ 时 $y = 1$，所以 $c = \ln 1 = 0$。因此

$$y = \mathrm{e}^{-kt} = \left(\mathrm{e}^{-k}\right)^t = b^t, \qquad \text{其中} b = \mathrm{e}^{-k}.$$

由于 $k > 0$，我们有 $0 < b < 1$；特别地，$b < 1$，正如题目所要求。留意以下结果，稍后会用到：

$$\ln b = -k, \qquad \text{所以} \qquad k = -\ln b > 0.$$

第 (ii) 部分

流出的情况与之前完全相同，速率为 ky，常数 k 亦不变；此外，水以速率 a 流入。所以净变化率是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a - ky.$$

? **想一想** 这条方程只涉及 k，那么 $\ln b$ 是从何而来的?

常数 b 是在第 (i) 部分以 $b = \mathrm{e}^{-k}$ 定义的，所以它只描述流出的情况，与其他因素无关；在这里它仍然是同一个数。代入 $k = -\ln b$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a + y\ln b$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\ln b = a,$$

这就是所要求的方程。

这是一条关于 y 的常系数线性方程。积分因子是

$$\exp\left(-\int \ln b\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{e}^{-t\ln b} = b^{-t}.$$

全式乘以 b^{-t} 后，左方成为一个恰当导数（exact derivative），因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b^{-t} = -b^{-t}\ln b$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y\,b^{-t}) = a\,b^{-t}.$$

两边积分，并利用 $\int b^{-t}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{b^{-t}}{\ln b}$（因 $\ln b \neq 0$ 而成立），

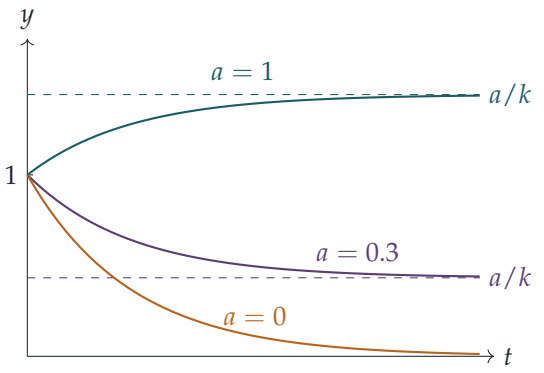
$$y\,b^{-t} = -\frac{a}{\ln b}\,b^{-t} + C.$$

当 $t = 0$ 时 $y = 1$，所以 $1 = -\dfrac{a}{\ln b} + C$，得 $C = 1 + \dfrac{a}{\ln b}$。全式乘以 b^t，

$$\begin{aligned} y &= -\frac{a}{\ln b} + \left(1 + \frac{a}{\ln b}\right) b^t \\ &= b^t + \frac{a\,(1 - b^t)}{-\ln b}. \end{aligned}$$

两种形式都可以接受。第二种较易理解，因为 $-\ln b = \ln(1/b) > 0$：它就是第 (i) 部分的解 b^t，再加上由流入的水所产生的一个正项。

当 $t \to \infty$ 时，$b^t \to 0$（因为 $0 < b < 1$），所以 $y \to \dfrac{a}{-\ln b} = \dfrac{a}{k}$。这是平衡水平（equilibrium level），此时流出量 ky 刚好与流入量 a 相抵。若 $a > k$，水箱的水量会上升并趋向这个水平；若 $a < k$，水量则会下降并趋向这个水平。



草图所示为 $b=\frac{1}{2}$（故 $k=\ln 2\approx 0.693$）的情况，分别取 $a=1$、$a=0.3$，并画出第 (i) 部分的曲线 $a=0$ 以作比较。

验算

- 取 $a=0$：答案化为 $y=b^t$，即第 (i) 部分的结果。
- 当 $t=0$ 时：$y=1+\frac{a(1-1)}{-\ln b}=1$。
- 对 $y=b^t+\frac{a}{\ln b}(b^t-1)$ 求导：得 $y'=b^t\ln b+ab^t$，而 $y\ln b+a=b^t\ln b+a(b^t-1)+a=b^t\ln b+ab^t$，两者吻合。
- 数值上，取 $b=\frac{1}{2}$、$a=1$、$t=2$，公式给出 $y\approx 1.3320$；以龙格－库塔法（Runge–Kutta method）逐步求解该微分方程，得到相同的值，而一般而言，对随机选取的 a、b、t，两者相差约在 10^{-13} 以内。

常见错误

- 写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky$，之后却忘记了因为水是流出的，$k$ 必须是负数；正是这个符号令 $b<1$ 必然成立。
- 在第 (ii) 部分把 b 当作一个新的未知数。它完全由流出的情况决定，所以 $\ln b=-k$ 可以直接沿用。
- 把 $\int b^{-t}\,\mathrm{d}t=-b^{-t}/\ln b$ 的符号弄错；可用求导来检查。

STEP 之外

这是最简单的房室模型（compartment model）：一个水箱，输入恒定，输出与存量成正比。同一条方程亦可描述以稳定速率注入血液、再经肾脏清除的药物，或者经电阻器充电

的电容器。每一个解都以指数方式趋向平衡值 a/k，这是稳定不动点（stable fixed point）的一个例子；当你学到微分方程组时，这个概念会变得十分重要。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）讨论了一阶线性方程，以及许多这类混合问题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。