详细解答

STEP I 1996，第 6 题

纯数学 · 三角函数求和与积分

> **STEP I 1996，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q6

关键思路

题目给出的恒等式（identity）正是为了裂项相消（telescoping）而设：若把和式 $\sum \cos kx$ 乘以 $2\sin\frac{1}{2}x$，每一项都会变成两个正弦之差，而相邻的差会互相抵消。一旦把 f 写成余弦之和，(ii) 中看似棘手的积分就变成单个余弦的积分，其中大部分在 $[0,\pi]$ 上都等于零。

解答

以下 n 均为正整数。

第 (i) 部分

设 $S=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$。乘以 $2\sin\frac{1}{2}x$，并逐项运用题目给出的公式，

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}x\,S &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sin(k+\tfrac{1}{2})x-\sin(k-\tfrac{1}{2})x\Big)\\ &= (\sin\tfrac{3}{2}x-\sin\tfrac{1}{2}x)+(\sin\tfrac{5}{2}x-\sin\tfrac{3}{2}x)+\cdots+(\sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin(n-\tfrac{1}{2})x)\\ &= \sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin\tfrac{1}{2}x,\end{aligned}$$

因为每个中间项都以正负号各出现一次，互相抵消。因此

$$\sin(n+\tfrac{1}{2})x=\sin\tfrac{1}{2}x+2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{k=1}^{n}\cos kx.$$

当 $0<x\le\pi$ 时，$0<\frac{1}{2}x\le\frac{1}{2}\pi$，故 $\sin\frac{1}{2}x>0$，可以用它来除：

$$\mathrm{f}(x)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx,$$

这正是所要证明的结果。

第 (ii) 部分

> ? **想一想** f 在 $x = 0$ 处没有定义。那么 $\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 这个积分到底有没有意义?

有。根据第 (i) 部分，在 $0 < x \leq \pi$ 上，函数 f 与余弦多项式 $1 + 2\sum \cos kx$ 相等，而后者在整个 $[0, \pi]$ 上连续（continuous）（在 0 处的值为 $2n + 1$）。改变单独一点的函数值，或让该点没有定义，都不会影响积分，所以我们可以改为对余弦之和积分。

第一个积分。对每个整数 $k \geq 1$，

$$\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi = 0,$$

因为 $\sin k\pi = 0$。所以只有常数项留下来：

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = \pi.$$

第二个积分。现在

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \cos kx\cos x\,\mathrm{d}x.$$

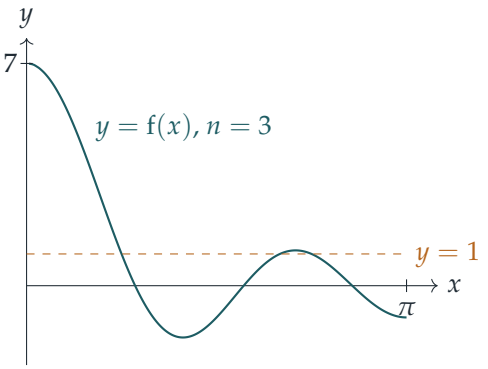
第一个积分是 $[\sin x]_0^\pi = 0$。至于其余的积分，利用 $2\cos kx\cos x = \cos(k+1)x + \cos(k-1)x$：

$$2\int_0^\pi \cos kx\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(k+1)x\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \cos(k-1)x\,\mathrm{d}x.$$

这里 $k + 1 \geq 2$，所以第一个积分如上所述等于 0。第二个积分也等于 0，除非 $k - 1 = 0$，此时被积函数（integrand）是 1，积分等于 π。所以只有 $k = 1$ 的一项有贡献，于是

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \pi.$$

（假如容许 n 取 0，则 $\mathrm{f} \equiv 1$，这个积分就会是 0；对每个 $n \geq 1$，它都等于 π。）



这幅图说明了为何第一个答案与 n 无关：0 附近那个高耸的尖峰（高度为 $2n+1$）被其后的振荡抵销，净面积始终等于常数项所占的面积，即 π。

验算

- 当 $x \to 0$ 时，$\sin(n+\frac{1}{2})x / \sin\frac{1}{2}x \to (2n+1)$，而余弦之和在 $x=0$ 处的值为 $1+2n$。两者吻合。
- 在 $x=\pi$ 处：$\mathrm{f}(\pi) = \sin(n+\frac{1}{2})\pi = (-1)^n$，同时亦有 $1+2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = (-1)^n$。
- 对 $n=1,\ldots,7$，以中点法则（midpoint rule）对原来的商式作数值积分，两个积分都得出 3.14159265…，与 π 相符。

常见错误

- 忘记说明为何可以除以 $\sin\frac{1}{2}x$：它不等于零，正是因为 $0 < x \le \pi$。
- 写成对所有 k 都有 $\int_0^\pi \cos kx \cos x \,\mathrm{d}x = 0$，于是第二个积分得出 0；其实 $k=1$ 的一项给出 $\int_0^\pi \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$。

STEP 之外

函数 f 就是狄利克雷核（*Dirichlet kernel*），是傅里叶级数（Fourier series）理论的核心对象。第 (ii) 部分的计算是正交性（orthogonality）的例子：$\cos kx$ 与 $\cos mx$ 相乘后在 $[0,\pi]$ 上的积分为零，除非 $k=m$。傅里叶系数正是这样提取出来的，而把一个函数与狄利克雷核相乘再积分，就得到它的傅里叶级数的第 n 个部分和（partial sum）。至于这些部分和在甚么情况下收敛（converge），严谨的论述可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。