详细解答

STEP I 1996，第 5 题

纯数学 · 复数的平方根

> **STEP I 1996，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q5

关键思路

每一部分都为下一部分铺路。第 (i) 部分的重点是比较有理部分与无理部分，并告诉我们 $4-2\sqrt{3}$ 是一个完全平方（perfect square）。第 (ii) 部分要求一个复数平方根（complex square root），经过惯常的“比较实部与虚部”一步之后，问题便归结为第 (i) 部分。第 (iii) 部分是一条二次方程，其判别式（discriminant）原来正是第 (ii) 部分那个数的四倍，所以我们需要的平方根早已准备好了。

解答

第 (i) 部分

展开得

$$(r+s\sqrt{3})^2 = (r^2+3s^2)+2rs\sqrt{3}.$$

我们希望这等于 $4-2\sqrt{3}$。由于 r 和 s 是有理数（rational number），r^2+3s^2 和 $2rs$ 也是有理数。若 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$，其中 a,b,c,d 为有理数且 $b\neq d$，则 $\sqrt{3}=(a-c)/(d-b)$ 会是有理数，但事实并非如此。因此我们可以比较有理部分和 $\sqrt{3}$ 的系数：

$$r^2+3s^2=4, \qquad rs=-1.$$

于是 $r\neq 0$，所以 $s=-1/r$，而第一条方程变成

$$r^2+\frac{3}{r^2}=4 \iff r^4-4r^2+3=0 \iff (r^2-1)(r^2-3)=0.$$

若取 $r^2=3$，则 $r=\pm\sqrt{3}$，并非有理数。所以 $r^2=1$，解为

$$r=1,\ s=-1 \qquad \text{和} \qquad r=-1,\ s=1,$$

即 $r+s\sqrt{3}=\pm(1-\sqrt{3})$。的确 $(1-\sqrt{3})^2=1-2\sqrt{3}+3=4-2\sqrt{3}$。

第 (ii) 部分

展开得 $(p+q\mathrm{i})^2=(p^2-q^2)+2pq\,\mathrm{i}$。由于 p 和 q 是实数，我们可以比较实部（real part）与虚部（imaginary part）：

$$p^2-q^2=3-2\sqrt{3},\qquad pq=1-\sqrt{3}.$$

第二条方程显示 $p\neq 0$，所以 $q=(1-\sqrt{3})/p$，而 $q^2=(1-\sqrt{3})^2/p^2=(4-2\sqrt{3})/p^2$。代入第一条方程并乘以 p^2，得

$$p^4-(3-2\sqrt{3})\,p^2-(4-2\sqrt{3})=0.$$

> **想一想** 这是一条以 p^2 为未知数的二次方程，系数看来相当麻烦。有没有快捷的方法把它因式分解？

p^2 的两个根之和必为 $3-2\sqrt{3}$，之积必为 $-(4-2\sqrt{3})$。试试 -1：另一个根便会是 $4-2\sqrt{3}$，而的确 $-1+(4-2\sqrt{3})=3-2\sqrt{3}$。所以

$$(p^2+1)(p^2-(4-2\sqrt{3}))=0.$$

由于 p 是实数，$p^2\neq -1$，所以由第 (i) 部分得 $p^2=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$。因此 $p=\pm(\sqrt{3}-1)$，而 $q=(1-\sqrt{3})/p=\mp 1$。解为

$$p=\sqrt{3}-1,\ q=-1\qquad 和\qquad p=1-\sqrt{3},\ q=1.$$

换句话说，$(3-2\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})\mathrm{i}$ 的平方根是 $\pm((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i})$。验算一下：$((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i})^2=(4-2\sqrt{3})-1-2(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}$，正是所求的数。

第 (iii) 部分

由二次公式（quadratic formula）（它对复数系数同样成立，因为配方法在 $\mathbb{C}$ 上一样行得通），

$$z=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1+\mathrm{i})(2\sqrt{3}-2)}}{2(1+\mathrm{i})}=\frac{1\pm\sqrt{1-(1+\mathrm{i})(2\sqrt{3}-2)}}{1+\mathrm{i}},$$

其中 $\pm\sqrt{\ }$ 代表两个复数平方根。根号内的量是

$$1-(2\sqrt{3}-2)-(2\sqrt{3}-2)\mathrm{i}=(3-2\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})\mathrm{i},$$

这正正是第 (ii) 部分的那个数。它的平方根是 $\pm((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i})$，所以

$$z=\frac{1\pm((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}},\quad 由此得\quad z_1=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}},\qquad z_2=\frac{(2-\sqrt{3})+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

把分子和分母同乘以 $1-\mathrm{i}$（使分母变成 2）：

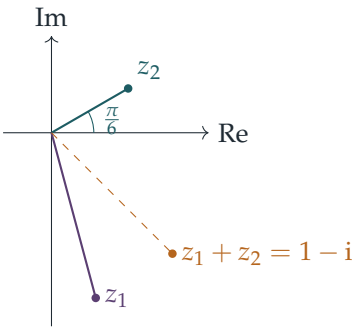
$$z_1 = \frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}}{2},$$
$$z_2 = \frac{((2-\sqrt{3})+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \frac{(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}}{2}.$$

想一想 这算是“尽可能简单的形式”吗？两个根当中，有没有哪一个可以再整理一下？

第二个根可以因式分解：$(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i} = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i})$，而 $\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$。至于第一个根，$|z_1|^2 = \frac{1}{4}((4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3})) = 2$，而 $z_1 = \frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 是 $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$ 除以 $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ 的商。所以解为

$$z_1 = \tfrac{1}{2}((\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/12},$$
$$z_2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i}) = (\sqrt{3}-1)\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/6}.$$

两种形式（直角坐标形式 (Cartesian form) 或模—辐角形式 (modulus–argument form)）都是完全合格的最终答案。



验算

- 根之和与根之积：对于 $az^2+bz+c=0$，我们需要 $z_1+z_2 = -b/a = 2/(1+\mathrm{i}) = 1-\mathrm{i}$ 以及 $z_1z_2 = c/a = (2\sqrt{3}-2)/(1+\mathrm{i}) = (\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$。由直角坐标形式，$z_1+z_2 = \frac{1}{2}(2-2\mathrm{i}) = 1-\mathrm{i}$；由极式 (polar form)，$z_1z_2 = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = (\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$。两者都吻合。
- 数值上，$z_1 \approx 0.366 - 1.366\mathrm{i}$ 而 $z_2 \approx 0.634 + 0.366\mathrm{i}$，把任何一个代入 $(1+\mathrm{i})z^2 - 2z + 2\sqrt{3} - 2$，结果在机器精度之内都是 0。

常见错误

- 在第 (i) 部分，忘记说明*为甚么*可以比较 $\sqrt{3}$ 的系数：这有赖于 r, s 是有理数而 $\sqrt{3}$ 是无理数（irrational number）。没有这个条件，便有无穷多个实数解。
- 在第 (ii) 部分，保留了 $p^2 = -1$，或者把 p 和 q 的正负号配错：$pq = 1 - \sqrt{3} < 0$ 迫使两者异号。
- 在第 (iii) 部分，把整条公式除以 2 时出错，或者让 $1 + \mathrm{i}$ 留在分母而没有把分母实数化。

STEP 之外

第 (i) 部分之所以行得通，是因为 1 和 $\sqrt{3}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性独立（linearly independent），所以 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{r + s\sqrt{3}\}$ 的表现就像有理数上的一个二维空间；第 (ii) 部分用的是同一个想法，只是换成 $\mathbb{R}$ 上的 1 和 i。这是域扩张（field extension）的起点，大学一年级的代数课程会由此一路发展到伽罗瓦理论（Galois theory）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）涵盖了这些内容，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（复分析的几何视角）则为复数平方根提供了一个优美的几何观点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。