详细解答

STEP I 1996，第 4 题

纯数学 · 以配方法积分

STEP I 1996，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s1-q4

关键思路

每当分母是二次式，就先配方（complete the square）：$x^2+2ax+1=(x+a)^2+(1-a^2)$。一切取决于 $1-a^2$ 的正负。若它是正数，分母是“平方和”，积分会得出反正切（inverse tangent）；若它是负数，分母是平方差（difference of squares），可拆成部分分式（partial fractions），积分会得出对数。之后真正要花工夫的，是把答案整理成题目所给的形式。

解答

以下一律以 I 表示在 $[0,1]$ 上的积分。配方得

$$x^2+2ax+1=(x+a)^2+1-a^2.$$

$|a|<1$ 的情况

设 $b=\sqrt{1-a^2}>0$。利用 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+b^2}=\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{u}{b}$，其中 $u=x+a$，得

$$I=\frac{1}{b}\left[\tan^{-1}\frac{x+a}{b}\right]_0^1=\frac{1}{b}(\alpha-\beta),\qquad \text{其中 } \alpha=\tan^{-1}\frac{1+a}{b},\quad \beta=\tan^{-1}\frac{a}{b}.$$

（分母在 $[0,1]$ 上永不为零，因为它至少是 $b^2>0$，所以这个积分没有问题。）我们需要的是单独一个反正切，所以取 $\alpha-\beta$ 的正切：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\frac{1+a}{b}-\frac{a}{b}}{1+\frac{(1+a)a}{b^2}}=\frac{b}{b^2+a+a^2}=\frac{b}{1+a},$$

这里用了 $b^2+a^2=1$。最后

$$\frac{b}{1+a}=\frac{\sqrt{(1-a)(1+a)}}{1+a}=\sqrt{\frac{1-a}{1+a}},$$

这一步成立，是因为 $1+a>0$。

> ? **想一想** 由 $\tan(\alpha-\beta)=t$ 真的可以得出 $\alpha-\beta=\tan^{-1}t$ 吗?

只有当 $\alpha-\beta$ 位于 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，即 $\tan^{-1}$ 的值域（range）之内才可以，所以我们必须验证这一点。由于 $(1+a)/b>0$，有 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，而 $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$。此外 $\alpha>\beta$，因为 $\tan^{-1}$ 是递增函数，而 $(1+a)/b>a/b$。所以 $0<\alpha-\beta<\pi$。在这个区间上，tan 只在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上取正值，而我们已求得 $\tan(\alpha-\beta)>0$；因此 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，于是

$$I=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\qquad(|a|<1),$$

正是所求。

（一个更巧妙的看法：设 $a=\cos\varphi$，$0<\varphi<\pi$，可得 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$ 和 $\beta=\frac{\pi}{2}-\varphi$，所以 $\alpha-\beta=\frac{\varphi}{2}$，而确实有 $\sqrt{(1-\cos\varphi)/(1+\cos\varphi)}=\tan\frac{\varphi}{2}$。）

$|a|>1$ 的情况

设 $c=\sqrt{a^2-1}>0$。这时分母是两个平方之差：

$$x^2+2ax+1=(x+a)^2-c^2=(x+a-c)(x+a+c),$$

拆成部分分式得

$$\frac{1}{(x+a-c)(x+a+c)}=\frac{1}{2c}\left(\frac{1}{x+a-c}-\frac{1}{x+a+c}\right).$$

这个二次式的根是 $-a\pm c$，两根之积为 1，两根之和为 $-2a$。

先假设 $a>1$。这时 $a>c$（因为 $a^2>a^2-1$），所以当 $x\geq 0$ 时，$x+a-c$ 和 $x+a+c$ 都是正数。因此

$$I=\frac{1}{2c}\Big[\ln\frac{x+a-c}{x+a+c}\Big]_0^1=\frac{1}{2c}\left(\ln\frac{1+a-c}{1+a+c}-\ln\frac{a-c}{a+c}\right).$$

利用 $(a-c)(a+c)=a^2-c^2=1$，两个分数都可以化简：

- $(1+a-c)(a+c)=(a+c)+(a-c)(a+c)=1+a+c$，所以 $\dfrac{1+a-c}{1+a+c}=\dfrac{1}{a+c}$；
- $a-c=\dfrac{1}{a+c}$，所以 $\dfrac{a-c}{a+c}=\dfrac{1}{(a+c)^2}$。

于是

$$I = \frac{1}{2c}\big(-\ln(a+c) + 2\ln(a+c)\big) = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}\ln\big(a+\sqrt{a^2-1}\big),$$

这就是题目所述的结果，因为这里 $a+\sqrt{a^2-1} > 0$，所以它等于自己的绝对值（modulus）。

那么 $a < -1$ 又如何？这时两根 $-a \pm c = |a| \pm c$ 都是正数，而且乘积为 1，所以较小的一个根 $|a| - \sqrt{a^2-1}$ 严格介乎 0 与 1 之间。被积函数（integrand）在 $[0,1]$ 之内有一个单极点（simple pole），在根 r 附近的表现就像某个常数乘以 $1/(x-r)$。所以这个积分并不收敛（converge），严格来说，公式只对 $a > 1$ 成立。（用 $\ln|\cdot|$ 重做同样的部分分式计算，可知公式给出的是柯西主值（Cauchy principal value），即在 r 两旁对称地挖去一小段之后，积分的极限。这就解释了题目中为何有绝对值符号。）

验算

- $a = 0$：积分是 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$，而公式给出 $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$。
- $a = 2$：用辛普森法则（Simpson's rule）算得 0.380173，与 $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$ 吻合。
- 当 $a \to 1$ 时，两个分支都趋向 $\frac{1}{2} = \int_0^1 (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x$。对第二个分支，当 c 很小时 $\ln(a+c) \approx c$；对第一个分支，$\tan^{-1} t \approx t$，而 $\sqrt{(1-a)/(1+a)}/\sqrt{1-a^2} = 1/(1+a)$。

常见错误

- 写下 $\tan^{-1} A - \tan^{-1} B = \tan^{-1}\frac{A-B}{1+AB}$，却没有验证两者之差位于 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之内。
- 忘记了当 $a < -1$ 时，分母会在 $[0,1]$ 之内变为零。

STEP 之外

这两个答案其实是 a 的同一个函数。在第一个答案中设 $a = \cos\varphi$，在第二个答案中设 $a = \cosh t$，分别得到 $\varphi/(2\sin\varphi)$ 和 $t/(2\sinh t)$；借助复数（$\cosh t = \cos(\mathrm{i}t)$），其中一个正是另一个的解析延拓（analytic continuation）。$a < -1$ 时积分发散（divergence），再靠主值来补救，这让我们初次领略复分析（complex analysis）如何处理积分路径上的极点。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）是领会这一点的绝佳去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。