详细解答

STEP I 1996，第 2 题

纯数学 • Beta 积分

STEP I 1996，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s1-q2

关键思路

(i) 和 (ii) 的被积函数（integrand）其实是同一个函数的两种写法：$\alpha x + (1-x) = 1 + (\alpha - 1)x$。因此，同一个积分用两种方法计算，便得到同一个关于 α 的多项式（polynomial）的两种描述。第 (i) 部分给出闭合形式（closed form），第 (ii) 部分把各项系数写成积分，余下的工作只需比较系数（comparing coefficients）便可完成，完全不需要用分部积分法（integration by parts）。

解答

第 (i) 部分

作代换（substitution）$u = 1 + (\alpha - 1)x$，则 $\mathrm{d}u = (\alpha - 1)\,\mathrm{d}x$；当 $x = 0$ 时 $u = 1$，当 $x = 1$ 时 $u = \alpha$。由于 $\alpha \neq 1$，我们可以除以 $\alpha - 1$：

$$\int_0^1 (1 + (\alpha - 1)x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha - 1}\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_1^\alpha = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{(n+1)(\alpha - 1)},$$

这正是所求。（即使 $\alpha < 1$ 或 $\alpha < 0$，这个代换仍然成立：它是线性的，而且无论上下限的次序如何，公式 $\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u$ 都成立。换个做法，直接对 $(1 + (\alpha - 1)x)^{n+1}/((n+1)(\alpha - 1))$ 求导亦可。）

第 (ii) 部分

把 αx 和 $1 - x$ 视为两项，用二项式定理（binomial theorem）展开被积函数：

$$(\alpha x + (1 - x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha x)^k (1 - x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}.$$

这是有限和，所以可以逐项积分；对 x 积分时，α 是常数：

$$\int_0^1 (\alpha x + (1-x))^n \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \left[\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x \right].$$

每个方括号内都是一个与 α 无关的数，所以这是一个关于 α 的多项式，次数至多为 n，而对于 $0 \le k \le n$，α^k 的系数是 $\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x$，这正是所求。

第 (iii) 部分

把 (ii) 中的多项式记作 $P(\alpha)$。由于 $\alpha x + (1-x) = 1 + (\alpha - 1)x$，第 (i) 部分表明，对每一个 $\alpha \neq 1$，

$$P(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{(n+1)(\alpha - 1)} = \frac{1}{n+1}(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n),$$

这里用了等比级数（geometric series）的因式分解 $\alpha^{n+1} - 1 = (\alpha - 1)(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n)$。

> ? **想一想** 我们只知道这两个多项式在 $\alpha \neq 1$ 时相等。为甚么可以比较系数?

两边之差是一个次数至多为 n 的多项式，而且在每一个 $\alpha \neq 1$ 处都等于零，所以它有无限多个根。一个次数至多为 n 的非零多项式最多只有 n 个根，因此这个差是零多项式：每一项系数都相同。（另一个说法是：两边都是连续的，所以在 $\alpha = 1$ 处也相等。）

在右边，每个 α^k（$0 \le k \le n$）的系数都等于 $\frac{1}{n+1}$。与 (ii) 比较，得

$$\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

因此

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)\,n!} = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!},$$

这就是所求的结果。

验算

- $k = 0$：$\int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$，而公式给出 $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$。
- $n = 2$，$k = 1$：$\int_0^1 (x - x^2) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1!\,1!}{3!}$。
- 数值上，$\int_0^1 x^2 (1-x)^3 \,\mathrm{d}x \approx 0.016667 = \frac{1}{60} = \frac{2!\,3!}{6!}$；我们随机选取 α 和 n，用辛普森法则（Simpson's rule）验证了 (i)，并对所有 $0 \le k \le n \le 12$ 精确地验证了 (iii)。
- 一个赏心悦目的推论：P 的各项系数全部相等，所以 $\int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x$ 与 k 无关。

常见错误

- 比较系数时没有指出 (i) 只在 $\alpha \neq 1$ 的情况下得证；只要补上一句关于多项式（或连续性）的说明，便可填补这个漏洞。
- 在 (ii) 中把 $(1+(\alpha-1)x)^n$ 按 $(\alpha-1)$ 的幂展开：这样得到的多项式是对的，却不是按 α 的幂排列。应改为展开 $\big(\alpha x+(1-x)\big)^n$。

STEP 之外

积分 $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$ 就是欧拉（Euler）的贝塔函数（beta function）$B(a,b)$，而本题的结果正是 $B(a,b)=\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ 在整数情况下的特例。在概率论中，它的意思是：若在 $[0,1]$ 上均匀地选取 p，然后掷 n 枚出现正面的概率为 p 的硬币，则正面的数目由 0 到 n 每一个都同样可能出现，概率各为 $\frac{1}{n+1}$（这正是“所有系数相等”的含义），而这亦是贝叶斯（Bayes）本人那篇著名论文的出发点。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）详细阐述了这背后的贝塔分布和伽玛分布（beta and gamma distributions）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。