详细解答

STEP I 1996，第 14 题

概率与统计 · 游程与条件概率

> **STEP I 1996，第 14 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q14

关键思路

按当前这一段连续结果如何结束来取条件（conditioning）。硬币一旦换面，之前发生的一切就再无关系：旧的一段连续结果已被打断，而新的一段长度为一。因此，掷出正面之后，只要一出现反面，游戏便随即“重新开始”，所处的状态与第一次投掷就掷出反面时完全相同；反之亦然。由此得到两条含两个未知数的线性方程。

解答

记 $x = \mathrm{P}(A \mid H)$ 及 $y = \mathrm{P}(A \mid T)$。各次投掷自始至终互相独立（independent）。我们取 $r, s \geq 1$。

$\mathrm{P}(A \mid H)$ 的方程

假设第一次投掷得正面。此时我们有一段长度为一的连续正面，而连续反面尚未开始。考虑接下来的 $r-1$ 次投掷（第 2 至第 r 次）。

- 若这些投掷全为正面，其概率为 p^{r-1}，则在第 r 次投掷时完成一段 r 个连续正面。期间完全没有出现过反面，所以必定没有 s 个连续反面抢先出现，故 A 发生。
- 否则，其概率为 $1 - p^{r-1}$，在连续正面的长度达到 r 之前，第 $2, \ldots, r$ 次投掷之中出现了反面。在第一个这样的反面出现时，连续正面未达到 r 便被打断，而此前并无反面出现，所以 s 个连续反面亦未曾出现。此刻我们手上恰好有一段长度为一的连续反面，而之前的一切都不可能对日后任何一段连续结果有所贡献。

? **想一想** 为甚么从该个反面起计，A 发生的概率恰好是 $\mathrm{P}(A \mid T)$?

第一次投掷得反面之后，情况是：有一段长度为一的连续反面，没有进行中的连续正面，而且往后的投掷与过去独立。这正正是上述第二种情形中第一个反面出现时的情况。由于往后的投掷与之前的投掷独立，而两种连续结果中哪一种先出现，只取决于当前这一段连续结果和往后的投掷，所以从该刻起 A 的条件概率（conditional probability）为 y。因此，根据全概率公式（law of total probability），

$$\mathrm{P}(A \mid H) = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\mathrm{P}(A \mid T),$$

所以 $\alpha = r - 1$。

$\mathrm{P}(A \mid T)$ 的方程

假设第一次投掷得反面。考虑第 2 至第 s 次投掷。

- 若全为反面（概率为 q^{s-1}），则在任何正面出现之前已完成一段 s 个连续反面，故 A 不发生。
- 否则（概率为 $1 - q^{s-1}$），在反面连续出现 s 次之前出现了正面。在该个正面出现时，我们有一段长度为一的连续正面，而反面方面并无任何进行中的连续结果，这正是第一次投掷得正面之后的情况。所以从该处起，A 发生的概率为 x。

因此

$$\mathrm{P}(A \mid T) = \left(1 - q^{s-1}\right)\mathrm{P}(A \mid H),$$

所以 $\beta = s - 1$。

（边界情况同样吻合。若 $r = 1$，第一条方程给出 $x = 1$，这是对的，因为单单一个正面已经是一段长度为 r 的连续正面。若 $s = 1$，第二条方程给出 $y = 0$。）

求解

把第二条方程代入第一条：

$$x = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{s-1}\right)x.$$

现在

$$1 - \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{s-1}\right) = p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1},$$

此式为正数（当 $0 < p < 1$ 时，它至少为 $p^{r-1} > 0$，因为 $q^{s-1}(1 - p^{r-1}) \geq 0$）。所以我们可以除以它。记 $D = p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1}$，则

$$\mathrm{P}(A \mid H) = \frac{p^{r-1}}{D}, \qquad \mathrm{P}(A \mid T) = \frac{p^{r-1}\left(1 - q^{s-1}\right)}{D}.$$

最后，以 $\mathrm{P}(H) = p$ 及 $\mathrm{P}(T) = q$ 应用全概率公式：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= p\,\mathrm{P}(A \mid H) + q\,\mathrm{P}(A \mid T)\\ &= \frac{p^{r-1}\left(p + q - q^{s}\right)}{D}\\ &= \frac{p^{r-1}\left(1 - q^{s}\right)}{p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1}},\end{aligned}$$

其中用到 $p + q = 1$。

验算

- 对称性：对于公平硬币且 $r = s$，答案应为 $\frac{1}{2}$。取 $p = q = \frac{1}{2}$ 及 $r = s = n$，分子为 $2^{1-n}(1 - 2^{-n})$，分母为 $2^{2-n} - 2^{2-2n} = 2 \cdot 2^{1-n}(1 - 2^{-n})$，得 $\frac{1}{2}$。
- 简单情况：$r = 1$ 时得 $\mathrm{P}(A) = 1 - q^{s}$，即首 s 次投掷并非全为反面的概率，这是正确的。
- 当 $p = \frac{1}{2}$、$r = 3$、$s = 2$ 时，公式给出 $\mathrm{P}(A \mid H) = \frac{2}{5}$、$\mathrm{P}(A \mid T) = \frac{1}{5}$ 及 $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{10}$。我们已通过精确求解整条马可夫链（Markov chain）确认这个结果，而模拟 200 000 局游戏所得的结果为 0.298。

常见错误

- 用了 p^{r} 而非 p^{r-1}：第一个正面已经给定，所以只需再多 $r - 1$ 个。
- 忘记 $\mathrm{P}(A)$ 最后还须以 p 和 q 加权。单是条件概率并不是答案。

STEP 之外

这个论证是对马可夫链所作的*首步分析*（first-step analysis）：状态是“当前的面和连续长度”，而重新开始这一性质就是马可夫性质（Markov property）。同一方法可求出任何正反面图样的吸收概率（absorption probability）和期望等待时间（expected waiting time），并进一步引向 Penney 游戏（Penney's game），当中某些图样竟然出人意表地胜过另一些图样。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）以合适的程度讲解马可夫链和首步分析。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。