详细解答

STEP I 1996，第 11 题

力学 · 抛体运动

STEP I 1996，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

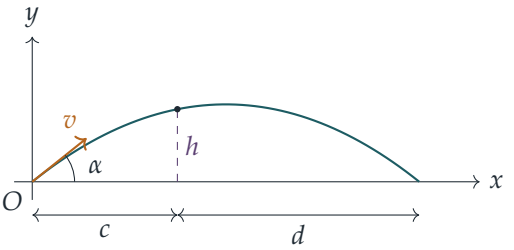
step.maths.org/questions/96-s1-q11

关键思路

抛体（projectile）的路径是一条抛物线（parabola），而我们知道它与地面相交的两个位置：$x = 0$ 和 $x = c + d$。二次函数（quadratic）一旦知道了根（roots），就只差一个常数未定，所以轨迹（trajectory）必定是 $y = kx(c + d - x)$，其中 k 为某个常数。点 (c, h) 决定了 k 的值，再与标准的轨迹方程比较，便可把 k 化为 $\tan\alpha$，继而化为 v^2。

解答

我们把质点（particle）视为只受重力作用而自由运动的点质量（point mass），不计空气阻力（air resistance）；取 O 为原点，x 轴沿运动方向水平，y 轴铅垂向上。设射程（range）为 $R = c + d$，并记 $T = \tan\alpha$。



抛射角

初速度的分量为 $v\cos\alpha$ 和 $v\sin\alpha$，因此经过时间 t 后的位置是 $x = vt\cos\alpha$，$y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$。利用 $t = x/(v\cos\alpha)$ 消去时间，得轨迹方程

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}.$$

质点在 $x = R$ 处着地，所以该处 $y = 0$。由于 $R \neq 0$，我们可以除以 R：

$$\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{R}. \qquad (*)$$

把这个结果代回轨迹方程，

$$y = Tx - \frac{Tx^2}{R} = \frac{T\,x(R-x)}{R}.$$

> ? **想一想** 为甚么值得在使用点 (c,h) 之前，先把 $g/(2v^2\cos^2\alpha)$ 换掉?

因为 $(*)$ 把 v 完全消去，只剩下一条以 T 为唯一未知数的方程。从几何角度看，我们已把抛物线写成因式分解的形式，它的两个根 0 和 R 一目了然。现在点 (c,h) 在路径上，而 $R - c = d$，所以

$$h = \frac{T\,cd}{c+d}, \qquad \text{即} \qquad \tan\alpha = \frac{h(c+d)}{cd},$$

这正是所要证明的结果。

抛射速率

把 $(*)$ 移项，并利用 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，

$$v^2 = \frac{gR}{2T\cos^2\alpha} = \frac{gR(1+T^2)}{2T} = \frac{g}{2}\left(\frac{R}{T} + RT\right).$$

由第一个结果，$\dfrac{R}{T} = \dfrac{cd}{h}$ 及 $RT = \dfrac{(c+d)^2h}{cd}$。因此

$$v^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{cd}{h} + \frac{(c+d)^2h}{cd}\right),$$

全题至此完成。

验算

- 根据算术—几何平均不等式（AM–GM inequality），$\frac{R}{T} + RT \geq 2R$，所以 $v^2 \geq gR$，而等号恰好在 $T = 1$ 时成立。这就是大家熟悉的事实：在给定速率下，最大射程为 v^2/g，并在 45° 时达到。

- 如果点 (c,h) 是飞行路径的最高点，则 $c=d$，且 $\tan\alpha=2h/c$，这与标准结果吻合：最大高度等于射程的四分之一乘以 $\tan\alpha$。
- 数值上，取 $g=9.81$、$c=3$、$d=5$ 和 $h=2$，公式给出 $\tan\alpha=\frac{16}{15}$ 及 $v^2\approx 78.64$。以细小的时间步长逐步模拟运动，质点在 $x=3$ 处经过高度 2.000，并在 $x=8.000$ 处着地。

常见错误

- 漏掉轨迹方程中的 $\cos^2\alpha$，或者把 $\sec^2\alpha$ 换成 $1+\tan\alpha$ 而不是 $1+\tan^2\alpha$。
- 试图直接由“在 $x=c$ 处高度为 h”和“在 $x=c+d$ 处高度为 0”这两条方程解出 v 和 α。这样做是可行的，但代数运算比先用 $(*)$ 消去 v 繁重得多。

STEP 之外

把二次函数用它的根来表示，这个技巧是一个重要思想的小小例子：多项式由它的零点决定，只差一个常数倍，由此可引伸至插值（interpolation），以及复数（complex numbers）范围内的因式定理（factor theorem）。在力学中，固定 v 而让 α 变化，会得到一族抛物线，它们的包络线（envelope）就是“安全抛物线”（parabola of safety），即抛体所能到达的所有点的边界。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学导论）以大学一年级的程度讨论抛体运动及其延伸课题（包括空气阻力）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。