详细解答

# STEP I 1996，第 10 题

力学 · 动量守恒

> **STEP I 1996，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q10

## 关键思路

这里要用到两个守恒关系：动量守恒（momentum is conserved；爆炸前动量为零），以及爆炸后的动能（kinetic energy）为 $E$。只要知道质量如何分配，这两个关系合起来便能确定两个速率，于是相对速率（relative speed）就成为质量分配方式的函数。要把它减至最小，归根究底只需一个不等式，而由于 $m_1 + m_2$ 是固定的，算术–几何平均不等式（AM–GM inequality）正是最自然的工具。

## 解答

我们把两个部分看作质点 (particles), 假设爆炸过程中没有质量损失, 所以 $m_1 + m_2 = M$, 并假设爆炸期间没有外力（external forces）作用。




**动量**。 太空船起初静止，所以爆炸前的总动量为零，爆炸后亦因此为零。两个动量 $m_1\mathbf{v}_1$ 与 $m_2\mathbf{v}_2$ 必须互相抵消，所以两个部分沿同一直线朝正好相反的方向运动，并且

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 = p,$$

其中 $p > 0$ 是两者动量的共同大小。由于两个部分朝相反方向运动，它们的相对速率确实是 $v_1 + v_2$。

**能量**。 爆炸后的全部动能都来自爆炸，所以

$$E = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2(m_1+m_2)}{2m_1m_2} = \frac{p^2M}{2m_1m_2}.$$

因此 $p^2 = \dfrac{2Em_1m_2}{M}$。

**相对速率**。 利用 $v_1 = p/m_1$ 和 $v_2 = p/m_2$，

$$v_1 + v_2 = p\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{pM}{m_1m_2},$$

所以

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{p^2M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2Em_1m_2}{M}\cdot\frac{M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2EM}{m_1m_2}.$$

**想一想** $E$ 和 $M$ 都是固定的。剩下唯一可以由我们自由改变的是甚么？我们又希望它朝哪个方向变化？

可以改变的只有质量的分配方式；要使 $v_1+v_2$ 尽量小，就要在 $m_1+m_2=M$ 的条件下，使乘积 $m_1m_2$ 尽量大。根据算术–几何平均不等式（两个质量皆为正数），

$$m_1m_2 \le \left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)^2 = \frac{M^2}{4},$$

等号成立当且仅当 $m_1 = m_2 = \tfrac{1}{2}M$。（等价地，$m_1m_2 = \tfrac{1}{4}M^2 - \tfrac{1}{4}(m_1-m_2)^2$。）因此

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{2EM}{m_1m_2} \ge \frac{2EM}{M^2/4} = \frac{8E}{M},$$

而由于速率是非负的，我们可以取平方根：

$$v_1 + v_2 \ge \left(\frac{8E}{M}\right)^{1/2}.$$

当太空船分裂成相等的两半时，这个界便可达到，此时每一半的速率都是 $\sqrt{2E/M}$。所以相对速率的最小可能值是 $(8E/M)^{1/2}$，正如题目所求。

## 验算

- 相等的两半：每一半的动能为 $\tfrac{1}{2}E = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}Mv^2$，所以 $v = \sqrt{2E/M}$，而 $2v = \sqrt{8E/M}$，与所得的界吻合。
- 极端的分配：当 $m_1 \to 0$ 时，$m_1m_2 \to 0$，相对速率趋向无穷大。这是合理的，因为一块极小的碎片若带走一部分能量，就必须运动得非常快。

- 单位：$E/M$ 的单位是 $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$，所以它的平方根是速率。
- 数值上，取 $M = 7$ 和 $E = 3$，让 $m_1$ 在 $(0,7)$ 上逐一取值，所得的最小相对速率为 $1.85164\ldots$，在 $m_1 = 3.5$ 时出现，与 $\sqrt{24/7} = 1.85164\ldots$ 相符。

## 常见错误

- 忘记说明两个部分为何朝相反方向运动；正是这一点令相对速率是 $v_1 + v_2$ 而不是 $|v_1 - v_2|$。
- 对 $m_1$ 求最小值时没有用到 $m_1 + m_2 = M$；正是这个约束条件令问题变成一维。
- 只证明了 $(8E/M)^{1/2}$ 是下界（lower bound），却没有指出这个下界确实可以达到（当 $m_1 = m_2$ 时）。

## STEP 之外

这是在质心参考系（centre-of-mass frame）中处理问题的最简单例子：在这个参考系中，二体分裂所产生的动量总是大小相等、方向相反，而动能为 $p^2/(2\mu)$，其中 $\mu = m_1 m_2/M$ 是约化质量（reduced mass）。这里 $(v_1 + v_2)^2 = 2E/\mu$，而约化质量在两个质量相等时最大。核衰变和二体轨道的背后也是同一个想法；Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对此有仔细的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。