详细解答

STEP I 1996，第 1 题

纯数学 · 圆柱的最优化

> **STEP I 1996，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q1

关键思路

描述这个罐子需要两个量：半径 r 和高 h。体积的约束条件让我们可以消去其中一个，于是 S 变成只含 r 的函数，用普通的微分法（differentiation）就可以求出它的最小值。最优的罐子原来有一个非常整齐的形状。一旦看出这个形状，两条关于球体的问题都归结为观察一个通过轴的截面（cross-section）。

解答

求表面积的最小值

设罐子的半径为 $r > 0$，高为 $h > 0$。则

$$V = \pi r^2 h, \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

其中 $2\pi r^2$ 来自两个底面，$2\pi rh$ 来自曲面侧面。对于固定的 V，我们有 $h = V/(\pi r^2)$，所以 $2\pi rh = 2V/r$，而

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \qquad r > 0.$$

求导得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2}.$$

当 $r^3 < V/(2\pi)$ 时它是负的，当 $r^3 > V/(2\pi)$ 时它是正的。所以 S 先递减后递增，它在 $r > 0$ 上的最小值出现在

$$r^3 = \frac{V}{2\pi}.$$

这是全局最小值（global minimum），而不仅是局部最小值，因为它是唯一的驻点（stationary point），而且导数在该处由 $-$ 变为 $+$。（从公式也可以看出这一点：当 $r \to 0^+$ 和

当 $r \to \infty$ 时，都有 $S \to \infty$。）

在这个半径下 $V = 2\pi r^3$，所以

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 2r.$$

最好的罐子，高度与阔度恰好相等。这时 $2V/r = 4\pi r^2$，所以

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2 = 6\pi \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3} \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot (2\pi)^{-2/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi)^{1/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi V^2)^{1/3}, \end{aligned}$$

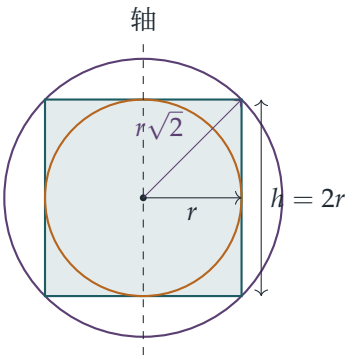
这就是所要求的最小值。

想一想 为甚么用 r 而不用 h 来计算?

两个变量都可行。不过消去 h 比较容易，因为 h 在两条公式中都只以一次项出现，所以代入 $h = V/(\pi r^2)$ 便得到一个简单的 r 的函数。消去 r 则会引入 $\sqrt{V/(\pi h)}$，代数运算会变得较为繁复。

罐内最大的球

从现在起，罐子满足 $h = 2r$。用一个通过其轴的平面把它切开：截面是一个 $2r \times 2r$ 的正方形。



罐内任何一个球的半径都满足 $\rho \le r$。要看出这一点，可把球投影到底面所在的平面上：得到一个半径为 ρ 的圆盘，它位于半径为 r 的底面圆盘之内。另外 $2\rho \le h = 2r$，这给出相同的上界。以罐子中心为球心、半径为 r 的球（截面图中的琥珀色圆）与两个底面及曲面侧面都相切，所以它放得进去。利用 $r^3 = V/(2\pi)$，最大的球的体积因此是

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = \tfrac{2}{3}V,$$

正如所求。

包含罐子的最小的球

在顶面的边缘上取一点，再在底面的边缘上取与它沿直径方向相对的一点。这两点是正方形截面的一对对角顶点，所以它们之间的距离是

$$\sqrt{(2r)^2+h^2}=\sqrt{8r^2}=2\sqrt{2}\,r.$$

任何包含罐子的球都包含这两点，所以它的直径至少是 $2\sqrt{2}\,r$，半径至少是 $\sqrt{2}\,r$。

> ? **想一想** 我们怎样知道半径为 $\sqrt{2}\,r$ 的球真的够大?

把球心放在罐子的中心 O。罐子上任何一点与轴的距离为 $\rho\le r$，并位于 O 之上或之下高度 z 处，其中 $|z|\le r$。因此它与 O 的距离是 $\sqrt{\rho^2+z^2}\le\sqrt{r^2+r^2}=\sqrt{2}\,r$。所以整个罐子都位于这个球之内（梅紫色的圆通过正方形的全部四个顶点）。

因此，能容纳罐子的最小的球半径为 $\sqrt{2}\,r$，体积为

$$\tfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\,r\right)^3=\tfrac{4}{3}\pi\cdot 2\sqrt{2}\,r^3=\tfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi\cdot\frac{V}{2\pi}=\frac{4\sqrt{2}}{3}V.$$

验算

- 取 $V=1$，在一个细密的 r 值网格上以穷举方式求 $2\pi r^2+2/r$ 的最小值，得 $S\approx 5.5358$，与 $3(2\pi)^{1/3}\approx 5.5358$ 吻合。
- 两个球的体积之比应为 $(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$，即半径之比的立方。果然 $\frac{4\sqrt{2}}{3}V\big/\frac{2}{3}V=2\sqrt{2}$。
- 大小次序合理：$\frac{2}{3}V<V<\frac{4\sqrt{2}}{3}V\approx 1.886\,V$，所以内球比罐子小，外球比罐子大。

常见错误

- 漏掉一个或两个底面，写成 $S=\pi r^2+2\pi rh$ 或 $S=2\pi rh$。这样会得出不同的最优形状。
- 只证明 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}r=0$，却没有说明为甚么该驻点是最小值。
- 把外球的半径取为 r 或 h，而不是罐子空间对角线的一半。

STEP 之外

这是约束优化（constrained optimisation）：在 $V(r,h)$ 固定的条件下，求 $S(r,h)$ 的最小值。在大学你会学到拉格朗日乘数（Lagrange multipliers），它不必消去变量就能处理这类问题。条件 $\nabla S=\lambda\nabla V$ 几乎立刻就给出 $h=2r$。这两个球也说明了凸体（convex

body）的“内切”球（inscribed ball）和“外接”球（circumscribed ball），它们是凸几何（convex geometry）的核心概念。想做更多同类风格的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学问题集）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。