详细解答

STEP III 1995，第 9 题

力学 · 复摆

STEP III 1995，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

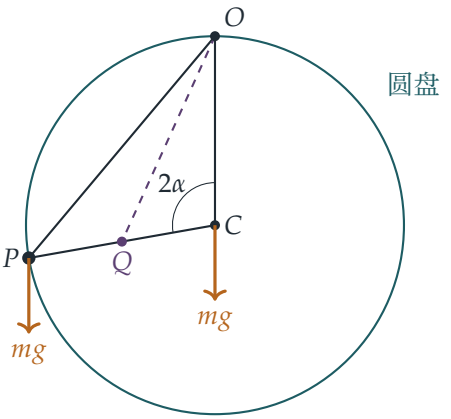
step.maths.org/questions/95-s3-q9

关键思路

圆盘与质点的质量相同，所以整个系统的质心（centre of mass）就是 CP 的中点 Q。差不多所有结论都由此而来：在稳定平衡（stable equilibrium）时，Q 位于 O 的正下方；而第 (iii) 部分的能量方程只需要 Q 的高度。余下的工作，就是等腰三角形 OCP 的几何，以及一个标准的转动惯量（moment of inertia）积分。

解答

我们把圆盘视为刚性薄片（rigid lamina），把 P 视为固定在其边缘上的质点（particle）；转轴是光滑的，所以机械能守恒。全题中 $OC = CP = r$，且 $\angle OCP = 2\alpha$。



第 (i) 部分

由于圆盘（质心为 C）与质点（位于 P）的质量同为 m，系统的质心就是 CP 的中点 Q。作用于系统的力只有重力和转轴上的反作用力，所以系统处于平衡，当且仅当 Q 与 O 在同一铅垂线上；而当 Q 在 O 的下方时，平衡是稳定的（此时任何位移都会令 Q 升高，使势能增加）。因此在稳定平衡时 OQ 是铅垂的，而 β 就是角 $\angle COQ$。

在圆盘所在的平面上取坐标轴，以 C 为原点，并令 O 位于 $(r,0)$；于是 $P = r(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$，$Q = \frac{r}{2}(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$。因此

$$\overrightarrow{OC} = (-r,\,0), \qquad \overrightarrow{OQ} = \tfrac{r}{2}(-(2-\cos 2\alpha),\ \sin 2\alpha).$$

由于 $2-\cos 2\alpha > 0$，向量 $\overrightarrow{OQ}$ 沿 $\overrightarrow{OC}$ 方向的分量为正数 $\frac{r}{2}(2-\cos 2\alpha)$，而与之垂直的分量为 $\frac{r}{2}\sin 2\alpha$，所以 β 是锐角，且

$$\tan\beta = \frac{\frac{r}{2}\sin 2\alpha}{\frac{r}{2}(2-\cos 2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2-\cos 2\alpha},$$

这正是所要证明的结果。

第 (ii) 部分

我们把 $\rho x/r$ 理解为每单位面积的质量。半径介乎 x 与 $x+\mathrm{d}x$ 之间的圆环，面积为 $2\pi x\,\mathrm{d}x$，所以

$$m = \int_0^r \frac{\rho x}{r}\,2\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\rho r^2}{3}.$$

该圆环上每一点与通过 C 且垂直于圆盘的轴的距离都是 x，所以对该轴的转动惯量为

$$I_C = \int_0^r \frac{\rho x}{r}\,2\pi x\cdot x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\rho r^4}{5} = \frac{3}{5}mr^2,$$

其中用了 $2\pi\rho r^2 = 3m$。通过 O 的轴与这条轴平行（两者都垂直于圆盘所在的铅垂平面），相距 $OC = r$，所以由平行轴定理（parallel axis theorem）得

$$I_O = \frac{3}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{8}{5}mr^2.$$

第 (iii) 部分

系统的转动惯量。三角形 OCP 是等腰三角形，顶角为 2α，所以弦长 $OP = 2r\sin\alpha$。质点的贡献是 $m(2r\sin\alpha)^2$，于是

$$I = \frac{8}{5}mr^2 + 4mr^2\sin^2\alpha = \frac{4}{5}mr^2\,(2+5\sin^2\alpha).$$

质心下降的高度。释放时 OQ 是水平的，所以 Q 与 O 同高。在最终位置，P 在 O 的正下方，所以 OP 是铅垂的，而任何一点在 O 以下的深度，就是它沿 OP 方向与 O 的距离。

- P 的深度为 $OP = 2r\sin\alpha$。
- 三角形 OCP 的底角为 $\frac{1}{2}(\pi - 2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$，所以 $\angle COP = \frac{\pi}{2} - \alpha$，而 C 的深度为 $r\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = r\sin\alpha$。

Q 是 CP 的中点，所以它的深度是两者的平均值，即 $\frac{3}{2}r\sin\alpha$。因此系统（总质量为 $2m$）损失的势能为 $2mg \cdot \frac{3}{2}r\sin\alpha = 3mgr\sin\alpha$。

> **想一想** 系统真的会到达 P 在 O 下方的那个位置吗?

系统在 Q 与 O 同高时由静止释放，其后便像复摆（compound pendulum）一样，在 OQ 水平的两个位置之间摆动，并经过 Q 低于 O 所在水平的每一个位置。在最终位置，Q 的深度为 $\frac{3}{2}r\sin\alpha > 0$，所以系统确实会到达该位置（而“$C$ 起初比 P 低”这个条件，只是决定了摆动的方向）。

能量。由静止开始，设角速率（angular speed）为 ω，则

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = 3mgr\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{6gr\sin\alpha}{\frac{4}{5}r^2(2+5\sin^2\alpha)} = \frac{15g\sin\alpha}{2r(2+5\sin^2\alpha)}.$$

C 沿着以 O 为圆心、半径为 $OC = r$ 的圆运动，所以 $v = r\omega$，且

$$v^2 = \frac{15gr\sin\alpha}{2(2+5\sin^2\alpha)},$$

这正是所要证明的结果。

极大值。设 $s = \sin\alpha$；由于 $0 < \alpha \le \pi/2$，故 $s \in (0,1]$。令 $f(s) = \dfrac{s}{2+5s^2}$，则

$$f'(s) = \frac{(2+5s^2) - 10s^2}{(2+5s^2)^2} = \frac{2-5s^2}{(2+5s^2)^2},$$

当 $s < \sqrt{2/5}$ 时为正，当 $s > \sqrt{2/5}$ 时为负。由于 $\sqrt{2/5} < 1$ 在容许的范围之内，f 在该处取得极大值，$f = \dfrac{\sqrt{2/5}}{4} = \dfrac{\sqrt{10}}{20}$。因此

$$v_{\max}^2 = \frac{15gr}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{20} = \frac{3\sqrt{10}}{8}gr \approx 1.19\,gr, \qquad \text{当}\ \sin\alpha = \sqrt{2/5}.$$

验算

- 若 $\alpha \to 0$，P 就落在 O 上，只有圆盘悬挂着，OC 是铅垂的：果然 $\tan\beta \to 0$。若 $\alpha = \pi/2$，P 与 O 位于直径的两端，Q 在 OC 上，同样有 $\beta = 0$。
- 取 $\alpha = \pi/2$：$I = \frac{28}{5}mr^2$，质量 $2m$ 下降了 $\frac{3}{2}r$，所以 $v^2 = r^2\cdot 3mgr\cdot\frac{10}{28mr^2} = \frac{15}{14}gr$，与公式吻合。

- 我们就几个不同的 α 值，由释放位置开始对运动方程作数值积分（RK4）；例如当 $\alpha = 0.7$、$r = 1.3$、$g = 9.81$ 时，模拟结果为 $v^2 = 15.1206$，与公式吻合至六位有效数字。直接搜索亦确认极大值为 $3\sqrt{10}/8 \approx 1.1859$（以 gr 为单位）。

常见错误

- I_C 用了均匀圆盘的数值 $\frac{1}{2}mr^2$；这里的密度向外递增，令 I_C 增大至 $\frac{3}{5}mr^2$。
- 在第 (iii) 部分忘记了质点对转动惯量的贡献 $m \cdot OP^2$。
- 答了 ω^2 而不是 v^2：题目问的是 C 的速率，即 $r\omega$。

STEP 之外

绕水平轴转动的刚体（rigid body）就是*复摆*：它的表现就像一个摆锤位于质心的单摆（simple pendulum），只是惯量由 Md^2 换成 I。在第 (i) 部分的平衡位置附近作小幅振动时，周期为 $2\pi\sqrt{I/(Mgd)}$，其中 $d = OQ$；而“等效单摆”的长度 $I/(Md)$ 则引出了 Kater 的可倒摆（reversible pendulum），这种摆曾用来精确量度 g。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）正是以这种思路处理刚体转动和平行轴定理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。