详细解答

STEP III 1995，第 8 题

纯数学 · 平面与球面

> **STEP III 1995，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q8

关键思路

平面截球面时，所得的圆的圆心就是由球心向该平面所作垂线的垂足（foot of the perpendicular）。因此，球心必定位于通过每一个圆的圆心的法线（normal）上，而毕氏定理（Pythagoras）则把球心沿每条法线的距离与球的半径联系起来。题目余下的部分，不过是把这一条向量方程与精心挑选的向量作点积（dot product）而已。

解答

法线与距离

通过 X 而垂直于 π 的法线，就是通过 $\mathbf{x}$ 而方向为 $\mathbf{n}$ 的直线：

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + t\,\mathbf{n}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

它与 π 相交于 $(\mathbf{x}+t\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} = p$ 之处，即（因为 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$）$t = p - \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}$ 之处。所以垂足是 $\mathbf{x} + (p - \mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$，而由于 $\mathbf{n}$ 是单位向量（unit vector），X 到 π 的垂直距离为

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - p|.$$

同时通过两个圆的球面

假设有一个球心为 $\mathbf{c}$、半径为 R 的球面包含这两个圆。固定 i。C_i 上的每一点 $\mathbf{y}$ 都满足 $|\mathbf{y} - \mathbf{r}_i| = 1$ 及 $(\mathbf{y} - \mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}_i = 0$；当 $\mathbf{y}$ 绕 C_i 走一圈时，向量 $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{r}_i$ 会取遍与 $\mathbf{n}_i$ 垂直的每一个单位向量。

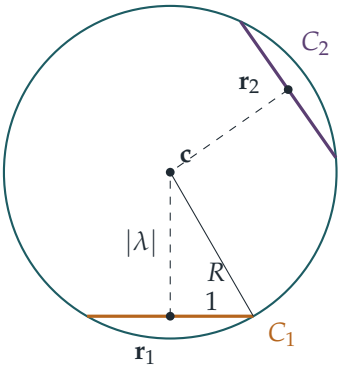
作分解 $\mathbf{c}-\mathbf{r}_i=\mathbf{a}+\mu_i\mathbf{n}_i$，其中 $\mathbf{a}\perp\mathbf{n}_i$。于是

$$\begin{aligned}R^2=|\mathbf{y}-\mathbf{c}|^2&=|\mathbf{u}-\mathbf{a}-\mu_i\mathbf{n}_i|^2\\&=1-2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}+|\mathbf{a}|^2+\mu_i^2,\end{aligned}$$

这里用到 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_i=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_i=0$。左边对 C_i 上的每一点都相同，所以 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}$ 对每一个容许的 $\mathbf{u}$ 都取相同的值。但只要 $\mathbf{u}$ 是容许的，$-\mathbf{u}$ 也是容许的，所以对平面上每一个单位向量 $\mathbf{u}$ 都有 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}=-\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}=0$，而取 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{a}$ 平行（假如 $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$）便会得出矛盾。因此 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$，并且

$$\mathbf{c}=\mathbf{r}_i+\mu_i\mathbf{n}_i,\qquad R^2=1+\mu_i^2.$$

用文字来说：球心位于通过 C_i 的圆心而垂直于 π_i 的法线上，这正是第一部分所求得的直线。



把以上结果应用于 $i=1$ 和 $i=2$，得 $1+\mu_1^2=R^2=1+\mu_2^2$，所以 $\mu_2=\pm\mu_1$。记 $\lambda=\mu_1$，则

$$\mathbf{r}_1+\lambda\mathbf{n}_1=\mathbf{c}=\mathbf{r}_2\pm\lambda\mathbf{n}_2,$$

所以只要存在合适的球面，这样的 λ 就必定存在，这正是所要证明的。

两个必要条件

移项后得

$$\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2=-\lambda\mathbf{n}_1\pm\lambda\mathbf{n}_2.$$

两边与 $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$ 作点积，而这个向量同时垂直于 $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$：

$$(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2)=0.$$

? **想一想** p_1 从何而来？它并没有在向量方程中出现。

圆心 $\mathbf{r}_1$ 位于 π_1 上，所以 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = p_1$；同理 $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = p_2$。记 $k = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$。把 $\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_2 \pm \lambda \mathbf{n}_2$ 先与 $\mathbf{n}_1$ 作点积，再与 $\mathbf{n}_2$ 作点积，得

$$p_1 + \lambda = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \pm \lambda k,$$
$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1 + \lambda k = p_2 \pm \lambda.$$

所以

$$p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \lambda(\pm k - 1), \qquad p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1 = \lambda(k \mp 1).$$

取上方的符号时，两式右边都等于 $\lambda(k-1)$；取下方的符号时，它们分别是 $-\lambda(k+1)$ 和 $\lambda(k+1)$。无论哪一种情况，两式左边不是相等就是互为相反数，所以

$$(p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 = (p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1)^2.$$

几何意义

第一个条件。它说明 $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$、$\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$ 共面（coplanar），即纯量三重积（scalar triple product）等于零。等价地说，通过 C_1 的圆心而垂直于 π_1 的法线，与通过 C_2 的圆心而垂直于 π_2 的法线，位于同一个平面上：它们不是异面直线（skew lines），所以它们或者相交（交于球心），或者平行。

第二个条件。根据第一部分，$|p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2|$ 是 C_2 的圆心到 π_1 的距离，而 $|p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1|$ 是 C_1 的圆心到 π_2 的距离。所以这个条件说明这两个距离相等：每个圆的圆心到另一个圆所在平面的距离，等于另一个圆心到这个圆所在平面的距离。这反映了图形的对称性：两个圆与 $\mathbf{c}$ 的距离同为 $|\lambda|$，所以对某个通过 $\mathbf{c}$ 的合适平面作反射（reflection），便会把两个圆互换，同时把这两个距离互换。

验算

- 取 $\pi_1 : z = 0$ 和 $\pi_2 : z = 2$，两个单位圆的圆心都在 z 轴上。它们位于球心为 $(0, 0, 1)$、半径为 $\sqrt{2}$ 的球面上；这时 $\lambda = 1$，取下方的符号，$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$，而第二个条件中的两个距离都等于 2。
- 在数值方面，我们随机构造了 5000 个半径 $R > 1$ 的球面，每个球面配上两个随机平面，各截出一个单位圆，并确认了圆上每一点都在球面上，结果发现两个条件在每一个情况下都成立，误差不超过 10^{-9}，而且两种符号都有出现。至于随机选取、互不相关的两个圆，则每一次都不满足第一个条件。

常见错误

- 未加论证便假设球心位于通过 $\mathbf{r}_i$ 的法线上；这正是整个证明的核心。

- 遗漏了 $\pm$：球心可以位于两个平面各自的法向量所指的同一侧，也可以位于相反的两侧。
- 忘记了由于 C_1 的圆心位于 π_1 上，所以 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = p_1$。

STEP 之外

这里的条件只是必要条件（necessary conditions）：要得到完整的“当且仅当”（if and only if），还需要两条法线确实相交于一个与两个圆等距的点。这类题目是踏入二次曲面（quadrics）解析几何（analytic geometry）的第一步，在那里，平面、球面以及它们的交集都用线性代数（linear algebra）来处理；纯量三重积会以量度体积的 3×3 行列式（determinant）的形式再次出现。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对这些概念有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。