详细解答

STEP III 1995，第 6 题

纯数学 · 轨迹与反演

> **STEP III 1995，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q6

关键思路

圆 $|z-\mathrm{i}|=1$ 通过原点，所以它的极式（polar form）方程特别简单：模（modulus）是辐角（argument）的单一个三角函数。一旦把 z 写成模—辐角形式，$1/z$ 便立即可得（取模的倒数，并把辐角变号），再把它写成直角坐标形式（Cartesian form），便会发现这个圆变成了一条直线。最后一部分是同一现象的逆向版本，直接设 $w=x+\mathrm{i}y$ 来做最快捷。

解答

z 的模

设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $r>0$。则 $z-\mathrm{i}=r\cos\theta+\mathrm{i}(r\sin\theta-1)$，所以

$$\begin{aligned}|z-\mathrm{i}|^2=1 &\iff r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-2r\sin\theta+1=1\\ &\iff r^2-2r\sin\theta=0\\ &\iff r=2\sin\theta,\end{aligned}$$

其中最后一步除以 r，这是容许的，因为 $z\neq 0$。所以

$$|z|=2\sin\theta.$$

由于 $r>0$，必有 $\sin\theta>0$，即 $0<\theta<\pi$：这个圆（圆心 i，半径 1）位于上半平面，只在原点与实轴相切，而原点已被排除。反过来，每一个 $\theta\in(0,\pi)$ 都给出圆上的一点 $z=2\sin\theta\,(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，所以当 θ 走遍 $(0,\pi)$ 时，z 描出除原点外的整个圆。

? **想一想** 为甚么从图形来看，$|z|=2\sin\theta$ 是“显而易见”的?

由 0 至 2i 的线段是圆的一条直径。根据半圆上的圆周角定理(angle in a semicircle)，以 0、z、2i 为顶点的三角形在 z 处是直角，而在 0 处的角是 $\frac{\pi}{2}-\theta$。所以 $|z| = 2\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = 2\sin\theta$。

$1/z$ 的模和辐角

由于 $z = 2\sin\theta\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2\sin\theta}(\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)),$$

所以

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{2\sin\theta}, \qquad \arg\frac{1}{z} = -\theta.$$

因为 $0 < \theta < \pi$，角 $-\theta$ 位于 $(-\pi, 0)$ 之内，所以它就是辐角主值（principal argument)。

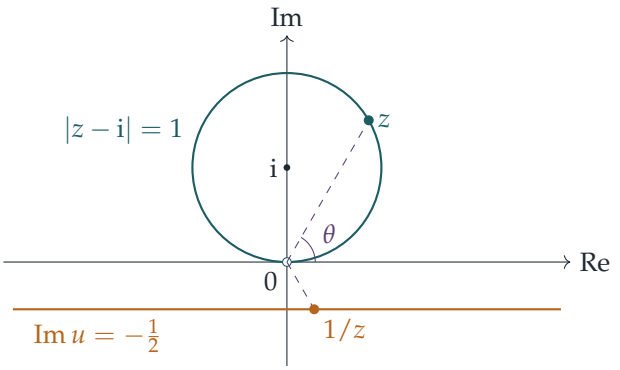
轨迹

要看出 $1/z$ 描出甚么图形，可把它转为直角坐标形式：

$$\frac{1}{z} = \frac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{2\sin\theta} = \tfrac{1}{2}\cot\theta - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}.$$

虚部恒为 $-\frac{1}{2}$，而当 θ 走遍 $(0, \pi)$ 时，实部 $\frac{1}{2}\cot\theta$ 取遍每一个实数值恰好一次（它由 $+\infty$ 递减至 $-\infty$)。所以 $1/z$ 描出整条直线 $\operatorname{Im} u = -\frac{1}{2}$。

因此 z 位于圆心为 i、半径为 1 的圆上（原点除外)，而 $1/z$ 位于通过 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ 的水平线上。下图画出两者，并标出 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时的一对点：这时 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$，而 $1/z = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$。这两点分别位于角度为 θ 和 $-\theta$ 的射线上，而它们与 0 的距离相乘得 1。当 z 趋近原点时，$1/z$ 沿着直线走向无穷远；圆的最高点 $z = 2\mathrm{i}$ 则对应点 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，即直线上最接近原点的一点。



轨迹 C

设 $w = x + \mathrm{i}y \neq 0$（要 $1/w$ 存在，必须有 $w \neq 0$)。则

$$\frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}, \qquad \text{所以} \qquad \operatorname{Re}\frac{1}{w} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

因此，对于 $w \neq 0$,

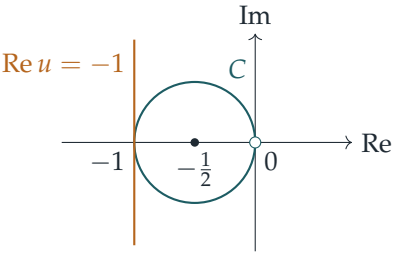
$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\frac{1}{w} = -1 &\iff x = -(x^2+y^2)\\ &\iff x^2 + x + y^2 = 0\\ &\iff (x+\tfrac{1}{2})^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

每一步都是可逆的（我们乘以了 x^2+y^2，而它不等于零），所以这是名副其实的“当且仅当”。因此 C 是圆

$$|w + \tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{2},$$

圆心为 $-\frac{1}{2}$，半径为 $\frac{1}{2}$，但要除去原点。原点确实在这个圆上，但 $1/w$ 在该处没有定义，所以它不属于 C。

这与第一部分互相呼应：在那里，一个通过 0 的圆被 $z \mapsto 1/z$ 映射到一条不通过 0 的直线；在这里，直线 $\operatorname{Re} u = -1$ 被同一个映射（它是自己的逆映射）映射到一个通过 0 的圆。



验算

- 取 $\theta = \frac{\pi}{6}$：则 $|z| = 1$ 且 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$，而确实有 $|z - \mathrm{i}| = |\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}| = 1$。它的倒数就是它的共轭复数（conjugate），$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \approx 0.866 - 0.5\mathrm{i}$，其虚部为 $-\frac{1}{2}$，与预期相符。
- $\theta = \frac{\pi}{2}$ 给出 $z = 2\mathrm{i}$，即圆的最高点，而 $1/z = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$。
- 对于 C：$w = -1$ 在圆上，而 $1/w = -1$；$w = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ 在圆上，而 $1/w = -1 - \mathrm{i}$，实部为 -1。

在每条轨迹上各取 10 000 个随机点作数值测试，三个结果全部得到确认。

常见错误

- 忘记范围 $0 < \theta < \pi$：公式 $|z| = 2\sin\theta$ 只在 $\sin\theta > 0$ 时才有意义。

- 把 $1/z$ 的轨迹说成半直线或线段。由于 $\cot\theta$ 在 $(0, \pi)$ 上取遍所有实数值，轨迹是整条直线。
- 把原计数入 C。原点满足圆的方程，但 $1/w$ 在该处并不存在。

STEP 之外

映射 $z \mapsto 1/z$ 是莫比乌斯变换（Möbius transformation）$z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ 的一个例子。这类映射的一个核心性质，是它们把“广义圆”（圆和直线）映射到广义圆，而通过原点的圆正正就是被 $1/z$ 映射到直线的那些圆。这是黎曼球面（Riemann sphere）几何的起点；在黎曼球面上，直线只不过是通过无穷远点的圆。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可视化复分析》）配以图像，把这一切阐述得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。