详细解答

STEP III 1995，第 5 题

纯数学 · 麦克劳林级数

> **STEP III 1995，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q5

关键思路

设 $\theta = \sin^{-1} x$，于是 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = 1/\sqrt{1-x^2}$。把 $y^{(1)}$ 乘以 $\sqrt{1-x^2}$，便可消去这个碍事的因子；再求导一次，就得到不含平方根的二阶方程。接着用莱布尼兹法则（Leibniz's rule）把方程化为递推关系（recurrence），而在 $x = 0$ 处，因子 $1 - x^2$ 变成 1，含 x 的项亦随之消失。这样，递推关系便把 0 处的各阶导数（derivative）全部交到我们手上。

解答

微分方程

设 $\theta = \sin^{-1} x$，则 $\sin\theta = x$，且当 $|x| < 1$ 时，$\cos\theta = \sqrt{1-x^2} > 0$，并有 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

于是 $y = \sin^2 m\theta$，由链式法则（chain rule）得

$$y^{(1)} = 2m \sin m\theta \cos m\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m \sin 2m\theta}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{1-x^2}\, y^{(1)} = m \sin 2m\theta.$$

把上式对 x 求导，左边用积法则（product rule）：

$$\sqrt{1-x^2}\, y^{(2)} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, y^{(1)} = 2m^2 \cos 2m\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

全式乘以 $\sqrt{1-x^2}$，并利用 $\cos 2m\theta = 1 - 2\sin^2 m\theta = 1 - 2y$：

$$(1-x^2)\, y^{(2)} = x\, y^{(1)} + 2m^2(1-2y),$$

这就是所求的方程。

想一想 为甚么不先把 $\sqrt{1-x^2}\,y^{(1)} = m\sin 2m\theta$ 两边平方?

平方后得 $(1-x^2)(y^{(1)})^2 = 4m^2y(1-y)$，再求导的话，每一项都会带着因子 $2y^{(1)}$。这样我们就要除以 $y^{(1)}$，而它在 $x=0$ 处等于零，偏偏那正是我们稍后最关心的一点。先求导而不先平方，就完全不必做这个除法。

递推关系

利用莱布尼兹法则, 把方程求导 n 次, 其中 $n \geq 1$。由于 $1-x^2$ 只有两个非零的导数 ($-2x$ 和 -2)，而 x 只有一个,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)y^{(2)}\right] &= (1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)\,y^{(n)},\\
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x\,y^{(1)}\right] &= x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)},\\
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[2m^2(1-2y)\right] &= -4m^2\,y^{(n)}.
\end{aligned}$$

最后一行需要 $n \geq 1$，因为只有这样，常数 $2m^2$ 求导后才会变成零。令两边相等,

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} = x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)} - 4m^2y^{(n)},$$

再合并同类项（共有 $2n+1$ 个 $xy^{(n+1)}$，以及 $n(n-1)+n = n^2$），得

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} = (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} + (n^2-4m^2)\,y^{(n)} \qquad (n \geq 1),$$

正如所求。

麦克劳林级数

在 $x=0$ 处有 $\theta = 0$，所以

$$y(0) = \sin^2 0 = 0, \qquad y^{(1)}(0) = m\sin 0 = 0, \qquad y^{(2)}(0) = 0 + 2m^2(1-0) = 2m^2,$$

其中最后一个由微分方程得出。在递推关系中代入 $x=0$，得

$$y^{(n+2)}(0) = (n^2-4m^2)\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 1).$$

奇数阶导数。由于 $y^{(1)}(0) = 0$，递推关系给出 $y^{(3)}(0) = 0$，继而 $y^{(5)}(0) = 0$，如此类推: 所有奇数阶导数在 0 处都等于零。这是合理的，因为 y 是 x 的偶函数（even function）。

偶数阶导数。取 $n = 2j$:

$$y^{(2j+2)}(0) = (4j^2-4m^2)\,y^{(2j)}(0) = -4(m^2-j^2)\,y^{(2j)}(0) \qquad (j \geq 1).$$

由 $y^{(2)}(0) = 2m^2$ 出发，依次对 $j = 1, 2, \ldots, k-1$ 应用上式，

$$y^{(2k)}(0) = 2m^2 \prod_{j=1}^{k-1}(-4(m^2 - j^2)) = (-1)^{k-1}\, 2^{2k-1} \prod_{j=0}^{k-1}(m^2 - j^2),$$

这里我们把最前面的 m^2 并入乘积，作为 $j = 0$ 的因子。（当 $k = 1$ 时，公式给出 $2m^2$，与应有的结果相符。）

因此麦克劳林级数（Maclaurin series）为

$$y = \sin^2(m \sin^{-1} x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\, 2^{2k-1}}{(2k)!}\, m^2(m^2 - 1^2)(m^2 - 2^2) \cdots (m^2 - (k-1)^2)\, x^{2k},$$

其首数项为

$$y = m^2x^2 - \frac{m^2(m^2-1)}{3}\, x^4 + \frac{2m^2(m^2-1)(m^2-4)}{45}\, x^6 - \cdots.$$

若 m 是整数，则凡 $k > |m|$ 的项都含有因子 $m^2 - m^2 = 0$，所以级数到此为止，y 是一个 $2|m|$ 次多项式。

验算

- $m = 1$：$y = \sin^2(\sin^{-1} x) = x^2$，而级数给出 x^2，其后各项全为零。$m = 2$：级数给出 $4x^2 - 4x^4$，而确实有 $\sin^2 2\theta = 4\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) = 4x^2 - 4x^4$。
- $m = \frac{1}{2}$，$x = \frac{1}{2}$：$y = \sin^2(\pi/12) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0.066987$。级数为 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^6 + \cdots$，其首三项之和为 0.066895，多加几项，差距便会逐渐缩小。
- 我们以数值方法验证过：微分方程在随机选取的 x 和 m 上成立；级数的系数精确地满足该方程；以及当 $|x| \le 0.8$ 时，级数（取至 300 项）与 y 相符，误差约为 10^{-15}。

常见错误

- 在 $n = 0$ 时使用递推关系。它只对 $n \ge 1$ 成立，因为 $n = 0$ 时常数 $2m^2$ 不会消失。$n = 0$ 的情况就是原来的方程，我们正是由它得出 $y^{(2)}(0) = 2m^2$。
- 弄错莱布尼兹法则的系数：$-n(n-1)y^{(n)}$ 这一项来自 $\binom{n}{2} \cdot (-2)$，而不是 $\binom{n}{2} \cdot (-2x)$。
- 写通项时漏掉正负交替的符号。每一步都乘以 $4(j^2 - m^2)$，而当 $m^2 > j^2$ 时这是负数。

STEP 之外

由导数砌出来的麦克劳林级数，未必等于原来的函数，但在这里，当 $|x| < 1$ 时两者确实相等。这个级数的收敛半径（radius of convergence）为 1（当 m 不是整数时，可用比值

审敛法（ratio test）得出），而 $\sin^{-1} x$ 到了 $x = \pm 1$ 就不再性质良好。m 为整数时所得的多项式，是切比雪夫多项式（Chebyshev polynomials）的近亲，因为 $\cos 2m\theta$ 是 $\sin\theta$ 的多项式。想知道这类级数为何真的收敛到原来的函数，可阅读 Abbott 的 *Understanding Analysis* 中关于带余项的泰勒定理（Taylor's theorem with remainder）的部分。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 则解释了为何收敛半径取决于 ± 1 处的毛病。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。