详细解答

STEP III 1995，第 4 题

纯数学 · 三角级数求和

STEP III 1995，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s3-q4

关键思路

余弦之和是复指数（complex exponential）之和的实部（real part），而 $\sum e^{\mathrm{i}k\theta}$ 是一个等比级数（geometric series）。先把它求和，再从分子和分母各抽出一个“半角”（half-angle）因子 $e^{\mathrm{i}\theta/2}$，就能把难以处理的 $e^{\mathrm{i}m\theta}-1$ 项化为正弦，分母中的 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$ 正是由此而来。至于不等式，诀窍是改写 $\mathrm{C}_n(\theta)$，使 $\frac{1}{2}$ 明显地分离出来。

解答

和式 C_n 与 S_n

设 $z=e^{\mathrm{i}\theta}$。由于 $0<\theta<2\pi$，我们有 $z\neq 1$，故等比级数求和公式适用：

$$\mathrm{C}_n(\theta)+\mathrm{i}\,\mathrm{S}_n(\theta)=\sum_{k=0}^{n}e^{\mathrm{i}k\theta}=\frac{e^{\mathrm{i}(n+1)\theta}-1}{e^{\mathrm{i}\theta}-1}.$$

现在把 $e^{\mathrm{i}\phi}-1=e^{\mathrm{i}\phi/2}(e^{\mathrm{i}\phi/2}-e^{-\mathrm{i}\phi/2})=2\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\phi/2}\sin(\frac{1}{2}\phi)$ 用于分子（取 $\phi=(n+1)\theta$）和分母（取 $\phi=\theta$）：

$$\mathrm{C}_n(\theta)+\mathrm{i}\,\mathrm{S}_n(\theta)=\frac{2\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}(n+1)\theta/2}\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{2\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\theta/2}\sin(\frac{1}{2}\theta)}=e^{\mathrm{i}n\theta/2}\,\frac{\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

因为 $0<\frac{1}{2}\theta<\pi$，分母不为零。这个分数是实数，所以取实部和虚部（利用 $e^{\mathrm{i}n\theta/2}=\cos\frac{1}{2}n\theta+\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}n\theta$）便得

$$\mathrm{C}_n(\theta)=\frac{\cos(\frac{1}{2}n\theta)\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)},\qquad \mathrm{S}_n(\theta)=\frac{\sin(\frac{1}{2}n\theta)\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

第一式就是题目要求的结果，第二式则是 S_n 的相应表达式。

想一想 有没有不用复数也能看出这个结果的方法?

有：把每一项乘以 $2\sin(\frac{1}{2}\theta)$，再用积化和差公式（product-to-sum formula）

$$2\sin(\tfrac{1}{2}\theta)\cos k\theta = \sin((k+\tfrac{1}{2})\theta) - \sin((k-\tfrac{1}{2})\theta).$$

由 $k=0$ 加到 n，各项裂项相消（telescope），只剩下最后一项和最初一项：

$$2\sin(\tfrac{1}{2}\theta)\,\mathrm{C}_n(\theta) = \sin((n+\tfrac{1}{2})\theta) - \sin(-\tfrac{1}{2}\theta) = \sin((n+\tfrac{1}{2})\theta) + \sin(\tfrac{1}{2}\theta). \qquad (*)$$

根据和差化积公式（sum-to-product formula）$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$，取 $A=(n+\frac{1}{2})\theta$，$B=\frac{1}{2}\theta$，右边等于 $2\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)\cos(\frac{1}{2}n\theta)$，与上面求得的结果一致。

不等式

式 $(*)$ 正是我们想要的形式。两边除以 $2\sin(\frac{1}{2}\theta)\neq 0$，得

$$\mathrm{C}_n(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

（若改由题目给出的公式出发，可用 $2\cos(\frac{1}{2}n\theta)\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta) = \sin((n+\frac{1}{2})\theta) + \sin(\frac{1}{2}\theta)$ 得到同一行。）因此

$$\left|\mathrm{C}_n(\theta) - \frac{1}{2}\right| = \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})\theta)|}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)} \le \frac{1}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)},$$

其中我们用到了当 $0<\theta<2\pi$ 时 $\sin(\frac{1}{2}\theta)>0$（所以分母不需要加上模（modulus）号），以及 $|\sin x|\le 1$。这就是所求的不等式，而等号成立当且仅当 $\sin((n+\frac{1}{2})\theta)=\pm 1$。

想一想 为甚么 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$ 为正这一点很重要?

假如容许 θ 取 $(0,2\pi)$ 以外的值，$\sin(\frac{1}{2}\theta)$ 便可能是负数，不等式的右边也会变成负数，而模不可能小于负数。在题目给定的范围内，$\frac{1}{2}\theta\in(0,\pi)$，所以这个上界确实是一个正数。

验算

- $n=1$: $\mathrm{C}_1 = 1+\cos\theta = 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)$, 而公式给出 $\cos(\frac{1}{2}\theta)\sin\theta/\sin(\frac{1}{2}\theta) = 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)$。同样，$\mathrm{S}_1 = \sin\theta$ 与 $\sin(\frac{1}{2}\theta)\sin\theta/\sin(\frac{1}{2}\theta)$ 相符。
- 当 $\theta\to 0$ 时，C_n 的公式趋向 $(n+1)$，正是 $n+1$ 个一之和；上界 $1/(2\sin\frac{1}{2}\theta)$ 则趋向无穷大，这是必然的。

- 数值验算，取 $n=3$, $\theta=1$：直接求和得 $\mathrm{C}_3(1)\approx 0.1342$，与公式相符，而且 $|\mathrm{C}_3-\frac{1}{2}|\approx 0.366\le 1/(2\sin\frac{1}{2})\approx 1.043$。等号成立的例子有 $n=2$，$\theta=\pi/5$，此时两边都等于 $1.618\ldots$。

常见错误

- 忘记和式由 $k=0$ 开始，所以共有 $n+1$ 项：等比级数的分子是 $e^{\mathrm{i}(n+1)\theta}$，而不是 $e^{\mathrm{i}n\theta}$。
- 没有先把分母化为实数，就对 $\left(e^{\mathrm{i}(n+1)\theta}-1\right)/\left(e^{\mathrm{i}\theta}-1\right)$ 取实部；半角因式分解能干净利落地做到这一点。
- 写下 $|\sin(\frac{1}{2}\theta)|$，却没有说明它为何等于 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$。

STEP 之外

函数 $\mathrm{C}_n(\theta)-\frac{1}{2}=\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)/\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)$ 除了相差一个常数因子外，就是狄利克雷核（Dirichlet kernel），它是傅里叶级数（Fourier series）理论的核心对象：一个函数的第 n 个傅里叶部分和，就是该函数对这个核取的平均。这里证明的上界，加上分子的振荡，是证明傅里叶级数何时收敛的起点（也是用于 $\sum\cos(k\theta)/k$ 这类级数的狄利克雷判别法（Dirichlet's test）的起点）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 有一章讲傅里叶级数，写得浅白易读，用的正是这些和式。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。