详细解答

STEP III 1995，第 3 题

纯数学 · 阻尼谐运动

STEP III 1995，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s3-q3

关键思路

试代入 $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$：微分方程（differential equation）便化为一条关于 λ 的二次方程，而题目的三种情况，正好对应其判别式（discriminant）的三种可能（两个相异实根、一个重根、复数根）。在有阻尼而仍然振荡的情况下，驻点（stationary point）每隔半个周期出现一次，时间间隔相等；每经过这样的一段时间，振荡因子只是变号，而指数因子则按相同的比例缩小。这就是相继极值之比为常数的原因。

解答

代入 $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$，得辅助方程（auxiliary equation）

$$\lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0, \qquad \lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - 1}.$$

以下 A 和 B 均为任意常数。

第 (i) 部分： $k > 1$

两根为相异实数，故

$$x = A\,\mathrm{e}^{(-k+\sqrt{k^2-1})\,t} + B\,\mathrm{e}^{(-k-\sqrt{k^2-1})\,t}.$$

（由于 $\sqrt{k^2-1} < k$，两个指数均为负数：这是过阻尼（overdamping），没有振荡。）

第 (ii) 部分： $k = 1$

辅助方程为 $(\lambda+1)^2 = 0$，有重根（repeated root）$\lambda = -1$。第二个独立解是 $t\,\mathrm{e}^{-t}$，故

$$x = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

（验证：若 $x = te^{-t}$，则 $x' = (1-t)e^{-t}$ 及 $x'' = (t-2)e^{-t}$，而 $(t-2)+2(1-t)+t = 0$。）

第 (iii) 部分： $0 < k < 1$

此时 $k^2 - 1 < 0$，故两根为 $\lambda = -k \pm i\omega$，其中

$$\omega = \sqrt{1-k^2} > 0.$$

取 $e^{(-k\pm i\omega)t}$ 的实组合，得

$$x = e^{-kt}(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

相继的极值

由 $x(0) = 0$ 得 $A = 0$，故 $x = Be^{-kt}\sin\omega t$，且 $B \neq 0$（否则 $x \equiv 0$，没有极大值或极小值可言）。求导得

$$\frac{dx}{dt} = Be^{-kt}(\omega\cos\omega t - k\sin\omega t).$$

由于 $k^2 + \omega^2 = 1$，可设 $k = \sin\varphi$、$\omega = \cos\varphi$，其中 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$，于是

$$\omega\cos\omega t - k\sin\omega t = \cos(\omega t + \varphi).$$

因此 $\dfrac{dx}{dt} = Be^{-kt}\cos(\omega t + \varphi)$，它等于零当且仅当 $\omega t + \varphi$ 是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍，并且在每个这样的时刻都会变号。所以（在 $t > 0$ 时）驻点位于

$$t_n = t_1 + \frac{(n-1)\pi}{\omega}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

彼此相隔 π/ω，间距相等；又因为 dx/dt 在每个驻点都变号，它们确实是极大值与极小值交替出现。

想一想 不必明确求出 t_1，怎样比较 $x(t_{n+1})$ 与 $x(t_n)$？

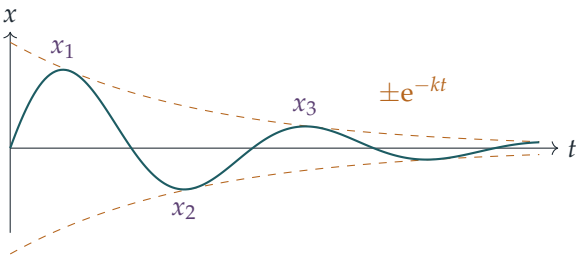
时间推前 π/ω，ωt 便增加 π，而 $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$。所以

$$x_{n+1} = Be^{-k(t_n+\pi/\omega)}\sin(\omega t_n + \pi) = -e^{-k\pi/\omega}\,Be^{-kt_n}\sin\omega t_n = -e^{-k\pi/\omega}\,x_n.$$

此外 $x_n \neq 0$，因为若 $\sin\omega t_n = 0$，则必有 $\cos\omega t_n = \pm 1$，于是 $dx/dt = \pm B\omega e^{-kt_n} \neq 0$。因此

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \alpha, \qquad \text{其中} \alpha = e^{-k\pi/\omega} = \exp\left(-\frac{k\pi}{\sqrt{1-k^2}}\right),$$

此值与 n 无关，正是所要证明的结果。（式中的负号印证了极大值与极小值交替出现。）



k^2 的公式

取对数，得 $\ln\alpha = -\dfrac{k\pi}{\sqrt{1-k^2}}$，故

$$(\ln\alpha)^2 = \frac{k^2\pi^2}{1-k^2} \implies (\ln\alpha)^2 - k^2(\ln\alpha)^2 = k^2\pi^2 \implies k^2 = \frac{(\ln\alpha)^2}{\pi^2 + (\ln\alpha)^2},$$

这就是所求的结果。

验算

- 当 $k \to 0$（没有阻尼）时，$\alpha \to 1$ 而 $\ln\alpha \to 0$，公式给出 $k^2 \to 0$，与预期相符：各个极值的大小全都相同。
- 当 $k \to 1^-$ 时，$\alpha \to 0$ 而 $(\ln\alpha)^2 \to \infty$，故 $k^2 \to 1$：在临界阻尼（critical damping）下，运动不再往回摆动。
- 数值上，取 $k = 0.5$ 及 $x(0) = 0$，把方程逐步向前数值求解，得出相继极值之比为 0.163034，与 $\mathrm{e}^{-0.5\pi/\sqrt{0.75}} \approx 0.163034$ 吻合；而且 $(\ln\alpha)^2/(\pi^2 + (\ln\alpha)^2) = 0.25 = k^2$。

常见错误

- 把一个极大值与下一个极小值之间的时间当作一整个周期 $2\pi/\omega$，而不是半个周期 π/ω；这样会得出 α^2 而不是 α。
- 以为极值出现在 $\sin\omega t = \pm 1$ 之处。其实不然：衰减因子令极值提早出现，移到 $\tan\omega t = \omega/k$ 之处。上面的论证自始至终不需要知道极值的确切位置，只需要知道它们的间距。

STEP 之外

$-\ln\alpha$ 这个量称为*对数衰减率*（logarithmic decrement）：工程师从记录下来的振荡中量度它，再用本题的公式把它换算成阻尼 k。Boyce 与 DiPrima 所著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）详细讨论了过阻尼、临界阻尼和欠阻尼三种情况。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。