详细解答

STEP III 1995，第 2 题

纯数学 · 归约公式

> **STEP III 1995，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q2

关键思路

因子 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{a-x}$ 都提示我们使用代换（substitution）$x = a\sin^2\theta$，这样两者会同时化为 $\sqrt{a}\sin\theta$ 和 $\sqrt{a}\cos\theta$。（求 I_0 还有一条巧妙的几何捷径。）至于归约公式（reduction formula），可用分部积分法（integration by parts），使 x 的幂次降一。这时 $a-x$ 的幂次会升一，我们再利用 $a-x$ 把多出的一个因子拆开。这样便会重新得到 I_n 本身，于是可以合并同类项。

全题设 $a > 0$。

解答

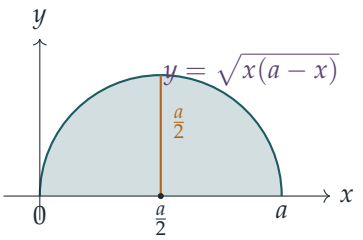
求 I_0

我们要求 $\mathrm{I}_0 = \int_0^a x^{1/2}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x$。设 $x = a\sin^2\theta$，则 $\mathrm{d}x = 2a\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$。当 x 由 0 变到 a 时，θ 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$，而在这个范围内 $\sin\theta, \cos\theta \geq 0$。所以 $\sqrt{x} = \sqrt{a}\sin\theta$ 及 $\sqrt{a-x} = \sqrt{a}\cos\theta$，不会有正负号的问题。于是

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_0 &= \int_0^{\pi/2} (\sqrt{a}\sin\theta)(\sqrt{a}\cos\theta)\,2a\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{8},\end{aligned}$$

这正是所求的结果。这里用到了 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ 和 $\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)$，而 $\cos 4\theta$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的积分为零。

一幅图。若 $y = \sqrt{x(a-x)}$，则 $y^2 = ax - x^2$，整理后得 $(x-\frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$，其中 $y \geq 0$。所以 I_0 就是半径为 $\frac{a}{2}$ 的半圆的面积，即 $\frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi a^2}{8}$。



归约公式

取 $n \geq 1$。以 $u = x^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $\mathrm{d}v = (a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x$ 作分部积分。则 $\mathrm{d}u = (n+\frac{1}{2})x^{n-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$ 及 $v = -\frac{2}{3}(a-x)^{3/2}$。由此得

$$\mathrm{I}_n = \Big[-\tfrac{2}{3}x^{n+\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\Big]_0^a + \frac{2}{3}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x.$$

边界项在两端都等于零：在 $x = a$ 处是因为有因子 $(a-x)^{3/2}$，在 $x = 0$ 处则是因为有 $x^{n+\frac{1}{2}}$。留意 $\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2}) = \frac{2n+1}{3}$。

想一想 新的积分含有 $(a-x)^{3/2}$，并不是 I_{n-1} 的形式。我们该怎样处理它?

把它写成 $(a-x)^{3/2} = (a-x)\,(a-x)^{1/2}$，然后展开第一个因子：

$$\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = a\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x - \int_0^a x^{n+\frac{1}{2}}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x = a\,\mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{I}_n.$$

所以

$$\mathrm{I}_n = \frac{2n+1}{3}(a\,\mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{I}_n) \quad\Longrightarrow\quad (2n+4)\,\mathrm{I}_n = (2n+1)\,a\,\mathrm{I}_{n-1},$$

这是两边乘以 3 再合并 I_n 各项后所得的（$3+2n+1 = 2n+4$）。这就是所求的结果。

计算 I_n

依次对 $k = n, n-1, \ldots, 1$ 应用 $\mathrm{I}_k = \dfrac{(2k+1)a}{2k+4}\,\mathrm{I}_{k-1}$，最后到达 I_0，得

$$\mathrm{I}_n = a^n\,\frac{\prod_{k=1}^n (2k+1)}{\prod_{k=1}^n (2k+4)}\cdot\frac{\pi a^2}{8}.$$

现在整理这两个乘积。分子是奇数的乘积 $3\cdot 5\cdots(2n+1)$。我们补上缺少的偶数 $2\cdot 4\cdots(2n) = 2^n n!$，得

$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\,n!}.$$

分母是 $\prod_{k=1}^n 2(k+2) = 2^n\cdot 3\cdot 4\cdots(n+2) = 2^n\,\dfrac{(n+2)!}{2}$。因此

$$\mathrm{I}_n = \frac{\pi a^{n+2}}{8}\cdot\frac{(2n+1)!}{2^n\,n!}\cdot\frac{2}{2^n\,(n+2)!} = \boxed{\frac{\pi\,a^{n+2}\,(2n+1)!}{4^{n+1}\,n!\,(n+2)!}}$$

当 $n = 0$ 时，这个公式同样给出正确的值 $\frac{\pi a^2}{8}$。

验算

- $n = 1$：递推关系（recurrence）给出 $6\mathrm{I}_1 = 3a\mathrm{I}_0$，所以 $\mathrm{I}_1 = \frac{\pi a^3}{16}$。公式则给出 $\pi a^3 \cdot 3!/(16 \cdot 1! \cdot 3!) = \frac{\pi a^3}{16}$，两者吻合。
- 对称性：把 x 换成 $a - x$，可见 $\mathrm{I}_1 = \int_0^a x^{1/2}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$ 亦成立。把两个表达式相加，得 $2\mathrm{I}_1 = a\mathrm{I}_0$，这就独立地验证了 $\mathrm{I}_1 = \frac{\pi a^3}{16}$。
- 取 $a = 1$ 作数值计算，用森逊法则（Simpson's rule）或中点法则作数值积分，得 $\mathrm{I}_0 \approx 0.392699 = \pi/8$ 及 $\mathrm{I}_3 \approx 0.085903$。公式给出 $\pi \cdot 7!/(4^4 \cdot 3! \cdot 5!) = 35\pi/1280 \approx 0.085903$。

常见错误

- 弄错 v 的正负号：$\int (a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}(a-x)^{3/2}$，其中的负号来自链式法则（chain rule）。
- 一心想直接得出 I_{n-1}，却没有留意到 I_n 在右边再次出现，必须把它合并。
- 在 $3 \cdot 4 \cdots (n+2) = (n+2)!/2$ 中漏掉因子 2。

STEP 之外

这些积分都是贝塔函数（Beta function）$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$ 的特殊情况。代入 $x = at$ 可得 $\mathrm{I}_n = a^{n+2}B\left(n+\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$。我们证明的递推关系，正是恒等式 $B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$ 的一个特例。在大学一年级的课程中，你会遇到公式 $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$，它解释了 π 的来历：$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 一书中，还有更多这类风格的归约公式题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。