详细解答

STEP III 1995，第 14 题

概率与统计 · 矩生成函数

STEP III 1995，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s3-q14

关键思路

矩母函数（moment generating function，简称 MGF）能把独立随机变量（independent random variables）之和化为乘积：若 T_1 与 T_2 独立，则 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta(T_1+T_2)}] = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T_1}]\,\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T_2}]$。因此我们先求出一个 MGF，把它自乘若干次，再认出所得结果正是同一族中某个密度函数（density）的 MGF。由于 MGF 决定其分布，认出它便已足够。

解答

T 的 MGF

对实数 θ，

$$M_T(\theta) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T}] = \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-(1-\theta)t}\,\mathrm{d}t.$$

这个积分只在 $\theta < 1$ 时收敛（否则被积函数不趋向 0），所以下文一律假设 $\theta < 1$。我们会反复用到以下积分：

$$\int_0^\infty t^k \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} \qquad (\lambda > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

这可由分部积分法（integration by parts）连做 k 次得出（或代入 $s = \lambda t$，再利用 $\int_0^\infty s^k \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = k!$）。取 $k = 1$ 及 $\lambda = 1 - \theta > 0$，得

$$\boxed{M_T(\theta) = \frac{1}{(1-\theta)^2}}, \qquad \theta < 1.$$

简单核对一下：$M_T(0) = 1$，这是每个 MGF 都必须满足的。

U 的 MGF

设 T_1 和 T_2 为做这两题所用的时间，则 $U = T_1 + T_2$，其中 T_1 和 T_2 的密度函数均为 f，而且互相独立（题目已说明）。于是 $\mathrm{e}^{\theta T_1}$ 与 $\mathrm{e}^{\theta T_2}$ 亦互相独立，所以它们乘积的期望值（expectation）等于各自期望值的乘积：

$$M_U(\theta) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T_1}\mathrm{e}^{\theta T_2}] = M_T(\theta)^2 = \frac{1}{(1-\theta)^4}, \qquad \theta < 1.$$

U 的密度函数

现在计算题目所给的密度函数 $\mathrm{g}(u) = \frac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}$ 的 MGF。在上述积分中取 $k = 3$ 及 $\lambda = 1-\theta$，

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\theta u}\,\tfrac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\cdot\frac{3!}{(1-\theta)^4} = \frac{1}{(1-\theta)^4}.$$

（取 $\theta = 0$ 可确认 g 的积分为 1，所以它确实是一个密度函数。）

> **想一想** 我们已证明 g 与 U 有相同的 MGF。为甚么这就表示 U 的密度函数是 g?

这里用到 MGF 的唯一性定理（uniqueness theorem）：若两个随机变量的 MGF 在包含 $\theta = 0$ 的某个开区间上存在而且相等，则两者有相同的分布。这里两个 MGF 对所有 $\theta < 1$ 都相等，当中包括区间 $(-1, 1)$。所以 U 的密度函数为

$$\mathrm{g}(u) = \frac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}, \qquad u \geq 0,$$

正如题目所求。

如果你不想使用唯一性定理，卷积（convolution）公式可直接给出同一结果。由于 $T_1, T_2 \geq 0$，对 $u \geq 0$，

$$\begin{aligned}\mathrm{g}(u) &= \int_0^u \mathrm{f}(s)\,\mathrm{f}(u-s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-u}\int_0^u s(u-s)\,\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{-u}\left[\tfrac{1}{2}us^2 - \tfrac{1}{3}s^3\right]_0^u = \frac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}.\end{aligned}$$

做 n 题所用的总时间

设 $U_n = T_1 + \cdots + T_n$，其中各 T_i 互相独立，密度函数均为 f。同样的乘积论证给出

$$M_{U_n}(\theta) = M_T(\theta)^n = \frac{1}{(1-\theta)^{2n}}, \qquad \theta < 1.$$

由 $n = 2$ 的规律可以猜想密度函数为 $\mathrm{h}_n(u) = c\,u^{2n-1}\mathrm{e}^{-u}$。利用上述积分并取 $k = 2n-1$，它的 MGF 是 $c\,(2n-1)!/(1-\theta)^{2n}$。这恰好在 $c = 1/(2n-1)!$ 时等于 M_{U_n}。再次根据

唯一性，做 n 题所用的总时间的密度函数为

$$\boxed{\mathrm{h}_n(u) = \frac{u^{2n-1}\mathrm{e}^{-u}}{(2n-1)!}, \qquad u \geq 0.}$$

当 $n = 1$ 时这就是 f，当 $n = 2$ 时这就是 g，与预期一致。

验算

- $\mathrm{E}[T] = M_T'(0) = 2$，与 $\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2$ 吻合。所以 $\mathrm{E}[U_n] = 2n$。由 h_n 亦得出同一数值：$\int_0^\infty u^{2n}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u/(2n-1)! = (2n)!/(2n-1)! = 2n$。
- 数值上，用森逊法则（Simpson's rule）可得 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{0.5t}\,t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 4.000$，与 $1/(1-0.5)^2$ 吻合。模拟 2×10^5 次，每次从 f 抽取三个时间并求和，得出 $\mathrm{P}(U_3 \leq 5) \approx 0.386$，而由 h_3 算得 $\int_0^5 u^5\mathrm{e}^{-u}/120\,\mathrm{d}u \approx 0.384$。

常见错误

- 忘记 $\theta < 1$ 这个限制：当 $\theta \geq 1$ 时 MGF 并不存在。
- 把 MGF 相加而不是相乘。U 的 MGF 是 $M_T(\theta)^2$，而不是 $2M_T(\theta)$。（$2T$ 的 MGF 则是 $M_T(2\theta)$，又是另一回事。）
- 弄错归一化常数（normalising constant）中的阶乘。u 的幂是 $2n-1$，所以常数是 $1/(2n-1)!$，而不是 $1/(2n)!$。

STEP 之外

密度函数 $t\mathrm{e}^{-t}$ 是形状参数（shape）为 2、速率参数（rate）为 1 的伽玛分布（gamma distribution），而 h_n 则是形状参数为 $2n$ 的伽玛分布。这道题说明：速率相同的独立伽玛变量相加时，形状参数亦相加。特别地，每个 T 的表现就如两个独立指数分布（exponential）时间之和，而伽玛分布正是这样作为泊松过程（Poisson process）中第 k 个事件的等候时间而出现的。在大学里，你会遇到特征函数（characteristic function）$\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}]$，它必定存在，并可用来证明中心极限定理（central limit theorem）。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）对母函数（generating functions）及这些概念有清晰的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。