详细解答

STEP III 1995，第 12 题

概率与统计 • 径向对称密度函数

> **STEP III 1995，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q12

本题在 *Beyond STEP* 第 12.22 节没有平均值的分布中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/cauchy.html

关键思路

径向对称（radially symmetrical）的密度只通过与原点的距离 $r = \sqrt{u^2+v^2}$ 而取决于 (u,v)，所以绕原点作任何旋转之后，它看起来都一样。特别地，点落在以原点为顶点的扇形内的概率，只取决于该扇形的角度。事件 $U/V < k$ 是由直线 $u = kv$ 与 u 轴割出的一对相对的扇形，所以它的概率不过是一个角度除以 2π。

解答

联合密度与径向对称

X 和 Y 各自的密度为 $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}$。由于 X 与 Y 独立（independent），它们的联合密度（joint density）是边际密度（marginal density）的乘积：

$$\mathrm{f}(x,y) = \phi(x)\,\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$

对所有实数 x 和 y 成立，这正是所求。

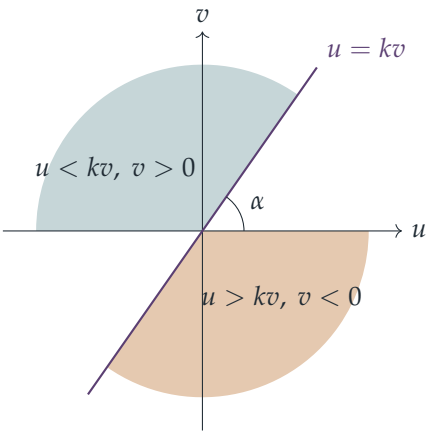
说这个密度是*径向对称*的，意思是它在点 (x,y) 的值只取决于该点与原点的距离 $r = \sqrt{x^2+y^2}$，而与该点的方向无关。这里 $\mathrm{f}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-r^2/2}$。换一个等价的说法：把平面绕原点作任何旋转，密度都不变，而它的等高线是以原点为圆心的圆。

关于 $\mathrm{P}(U/V < k)$ 的恒等式

设 U 和 V 具有径向对称的联合密度 $h(u,v) = \rho\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$。直线 $v = 0$ 的概率为零（它的面积为零），所以我们可以不理会 $V = 0$ 的情况。把不等式 $U/V < k$ 乘以 V，并在 $V < 0$ 时把不等号反转，得

$$\left\{\frac{U}{V} < k\right\} = \{U < kV,\ V > 0\} \cup \{U > kV,\ V < 0\},$$

而右边的两个事件是互斥（disjoint）的。



如图所示（图中取 $k > 0$），通过原点的直线 $u = kv$ 与 u 轴把平面分成四个扇形，其中两个涂上阴影的扇形合起来就是事件 $U/V < k$。映射 $(u,v) \mapsto (-u,-v)$ 是绕原点旋转 π，它把区域 $\{u < kv,\ v > 0\}$ 恰好映到 $\{u > kv,\ v < 0\}$ 上（把两个不等式都乘以 -1 即可）。径向对称的密度满足 $h(-u,-v) = h(u,v)$，所以这两个区域的概率相同。因此

$$\mathrm{P}\left(\frac{U}{V} < k\right) = 2\,\mathrm{P}(U < kV,\ V > 0),$$

这就是我们要证明的结果。

U/V 的密度

采用极坐标（polar coordinates）$u = r\cos\theta$，$v = r\sin\theta$。区域 $\{u < kv,\ v > 0\}$ 是扇形 $\alpha < \theta < \pi$，其中 $\alpha \in (0,\pi)$ 是射线 $u = kv$，$v > 0$ 与正 u 轴所成的角，所以 $\cot\alpha = k$。（事实上，当 $0 < \theta < \pi$ 时有 $\sin\theta > 0$，于是 $u < kv$ 变成 $\cot\theta < k$；由于 cot 在 $(0,\pi)$ 上递减，这就是 $\theta > \alpha$。）

> **想一想** 在不知道函数 ρ 的情况下，(U,V) 落在以原点为顶点、角度为 β 的扇形内的概率是多少？

在极坐标中，面积元素是 $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$，所以扇形 $\theta_1 < \theta < \theta_1 + \beta$ 的概率为

$$\int_{\theta_1}^{\theta_1+\beta}\int_0^\infty \rho(r)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \beta\int_0^\infty \rho(r)\, r\,\mathrm{d}r = \frac{\beta}{2\pi},$$

因为取 $\beta = 2\pi$ 便得到整个平面，所以 $2\pi\int_0^\infty \rho(r)\, r\,\mathrm{d}r = 1$。换句话说，无论 ρ 是甚么，(U, V) 的方向都是均匀分布（uniformly distributed）的。

我们的扇形的角度是 $\pi - \alpha$，所以

$$\mathrm{G}(k) = \mathrm{P}\Big(\frac{U}{V} < k\Big) = 2\cdot\frac{\pi-\alpha}{2\pi} = 1 - \frac{\alpha}{\pi}.$$

由于 $\cot\alpha = k$ 且 $\alpha \in (0, \pi)$，我们有 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan k$（两边都在 $(0, \pi)$ 内，而且余切都等于 k，因为 $\cot(\frac{\pi}{2} - \psi) = \tan\psi$）。因此

$$\mathrm{G}(k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan k, \qquad -\infty < k < \infty.$$

它由 0 上升至 1，正如分布函数（distribution function）所必须的那样。求导便得到 U/V 的密度：

$$\mathrm{g}(k) = \mathrm{G}'(k) = \frac{1}{\pi(1+k^2)}, \qquad -\infty < k < \infty,$$

这正是所求。特别地，这个结果适用于第一部分中两个独立标准正态变量（standard normal）之比 X/Y。

验算

- $\mathrm{G}(0) = \frac{1}{2}$：由对称性，$U/V$ 取正值与取负值的可能性相同。
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\pi(1+k^2)} = \frac{1}{\pi}\big[\arctan k\big]_{-\infty}^{\infty} = 1$。
- 用三个不同的径向对称分布（两个独立的标准正态变量、单位圆盘上的均匀分布，以及与 e^{-r} 成正比的密度）各取 2×10^5 个点进行模拟，每次都得到 $\mathrm{P}(U/V < 0.7) \approx 0.694$，与 $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan 0.7 \approx 0.6944$ 吻合；对于若干个 k 值，恒等式两边的差距都在抽样误差之内。

常见错误

- 写成 $\{U/V < k\} = \{U < kV\}$：当 $V < 0$ 时，乘以 V 会令不等号反转。
- 不加细想便取 $\alpha = \arctan(1/k)$：当 $k < 0$ 时它落在 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 内，而我们需要的角却在 $(0, \pi)$ 内。写成 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan k$ 则对每个 k 都适用。

STEP 之外

密度 $\frac{1}{\pi(1+k^2)}$ 就是标准柯西分布（*Cauchy distribution*）。它以没有平均值而闻名（$|k|\,\mathrm{g}(k)$ 的积分发散），所以大数定律（law of large numbers）对它并不成立：n 个独立柯西变量的平均值，与其中任何一个变量具有相同的柯西分布。这里的极坐标论证，让你初尝以雅可比行列式（Jacobian）变换联合密度的滋味，这是大学一年级的标准技巧。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）对两者都有论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。