详细解答

STEP III 1995，第 11 题

力学 · 相对速度

> **STEP III 1995，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q11

关键思路

改用船的参考系（frame of reference）来看。相对于船，飞机必须沿西北方向的直线笔直飞出，再沿同一直线笔直飞回。空气带着飞机一起移动，所以在这个参考系中，飞机的速度等于它的空速（airspeed）向量再加上一股“水流”：风的速度减去船的速度。一旦知道这股水流，每一程都是一道渡河问题。我们选取航向（heading），使合速度（resultant velocity）指向这条直线的方向，然后由来回所需的时间定出距离。

解答

全题取 x 轴向东、y 轴向北，速率以节（knot，即每小时海里数）为单位，于是距离便以海里（nautical mile）为单位。船的速度是 $(-V,0)$。若空气以速度 $\mathbf{w}$ 移动，而飞机相对于空气的速度是 $\mathbf{a}$，其中 $|\mathbf{a}| = kV$，则飞机相对于船的速度（相对速度，relative velocity）是

$$\mathbf{a}+\mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} = \mathbf{w} - (-V,0) = \mathbf{w} + (V,0).$$

飞机一直保持在船的西北方，所以 $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ 在去程必须指向 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ 的方向，在回程则必须指向 $-\mathbf{u}$ 的方向。

有风时：去程

风是由北向南吹的，所以 $\mathbf{w} = (0,-V)$，而

$$\mathbf{c} = (V,-V) = -\sqrt{2}\,V\,\mathbf{u}.$$

这股水流的速率是 $\sqrt{2}\,V$，方向为正东南，恰好沿着巡逻线。因此机师只需把机头对准这条直线。去程（向西北）时她正面逆流而飞；回程时则顺流而飞：

$$\text{去程速率} = (k-\sqrt{2})V, \qquad \text{回程速率} = (k+\sqrt{2})V.$$

这里需要 $k > \sqrt{2}$：否则飞机永远无法沿西北方向的直线离开船。

若飞机飞到距离船 d_w 之处，而每次来回需时 $\frac{1}{2}$ 小时，则

$$\frac{d_w}{(k-\sqrt{2})V} + \frac{d_w}{(k+\sqrt{2})V} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{d_w}{V}\cdot\frac{2k}{k^2-2} = \frac{1}{2},$$

所以

$$d_w = \frac{(k^2-2)V}{4k}.$$

因此去程需时

$$\frac{d_w}{(k-\sqrt{2})V} = \frac{k^2-2}{4k(k-\sqrt{2})} = \frac{k+\sqrt{2}}{4k}\ \text{小时} = 15\left(1+\frac{\sqrt{2}}{k}\right)\ \text{分钟}.$$

这个时间必定多于 15 分钟，正合预期：去程是逆流而行的。

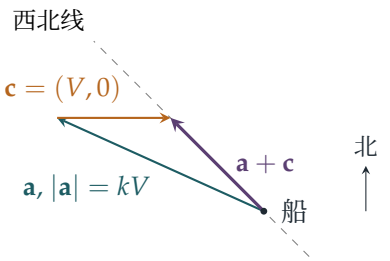
想一想 在无风的情况下，飞机为甚么不能同样只把机头对准西北？

无风时，水流不再沿着巡逻线。假如机师把机头对准西北，水流中向东的部分便会把飞机带离这条直线。她必须把机头稍为偏向迎着水流的一方，而这会耗去她一部分空速。

无风时

现在 $\mathbf{w} = \mathbf{0}$，所以 $\mathbf{c} = (V, 0)$：相对于船，空气以速率 V 向东流动。把 $\mathbf{c}$ 分解为沿直线的分量（component）和垂直于直线的分量，前者用 $\mathbf{u}$，后者用 $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$：

$$\mathbf{c} = -\frac{V}{\sqrt{2}}\,\mathbf{u} + \frac{V}{\sqrt{2}}\,\mathbf{v}.$$



合速度不能有 $\mathbf{v}$ 分量，所以 $\mathbf{a}$ 的 $\mathbf{v}$ 分量必须是 $-V/\sqrt{2}$。由于 $|\mathbf{a}| = kV$，它沿行进方向的分量便是

$$\sqrt{k^2V^2 - \tfrac{1}{2}V^2} = V\sqrt{k^2 - \tfrac{1}{2}}.$$

沿着这条直线，水流在去程的贡献是 $-V/\sqrt{2}$，在回程则是 $+V/\sqrt{2}$（因为 $\mathbf{c}\cdot(-\mathbf{u}) = V/\sqrt{2}$）。设 $A = V\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}$ 及 $B = V/\sqrt{2}$，则

$$\text{去程速率} = A - B, \qquad \text{回程速率} = A + B.$$

去程速率是正数，因为 $A^2 - B^2 = V^2(k^2 - 1) > 0$。

来回同样需时半小时，于是

$$\frac{d_c}{A-B} + \frac{d_c}{A+B} = \frac{2A\,d_c}{A^2-B^2} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad d_c = \frac{A^2-B^2}{4A} = \frac{V(k^2-1)}{4\sqrt{k^2-\frac{1}{2}}}.$$

比值

两式相除，

$$\frac{d_w}{d_c} = \frac{(k^2-2)V}{4k}\cdot\frac{4\sqrt{k^2-\frac{1}{2}}}{V(k^2-1)} = \frac{(k^2-2)\sqrt{k^2-\frac{1}{2}}}{k(k^2-1)}.$$

由于 $\sqrt{k^2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4k^2-2}$，

$$\frac{d_w}{d_c} = \frac{k^2-2}{2k(k^2-1)}\sqrt{4k^2-2},$$

这正是所求的结果。

验算

- 当 $k \to \infty$ 时，风和船几乎无关重要。去程时间趋向 15 分钟，而 $d_w/d_c \to 1$（比值的分子和分母都以 $2k^3$ 的速度增长）。
- 当 $k \to \sqrt{2}^{+}$ 时，有风时的去程速率降至零，所以 $d_w \to 0$，比值 $\to 0$，与公式相符。
- 当 $k = 2$ 时，去程需时 $15(1 + 1/\sqrt{2}) \approx 25.6$ 分钟，而 $d_w/d_c = \frac{2}{12}\sqrt{14} \approx 0.624$。我们直接解出航向，并逐步模拟整个运动，以数值方法确认了这个结果。

常见错误

- 把风向弄反：“由北向南”的风是*朝着*南方吹的。

- 把船的速度加上去，而不是减去。相对于一艘向西航行的船，静止的空气是向东漂移的。
- 在无风时把机头对准西北，并以 $kV \pm V/\sqrt{2}$ 作为速率。必须先抵销横向的水流。

STEP 之外

这是一次伽利略参考系变换（Galilean change of reference frame）：在彼此作匀速相对运动的参考系中量度所得的速度，只相差一个常向量。迈克生—莫雷（Michelson–Morley）的“河中小船”论证，背后也是同一套计算。在那个论证中，横渡来回与顺逆流来回所需的时间并不相同，情况与本题如出一辙，而这正是后来被狭义相对论（special relativity）推翻的经典计算。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）正是以这种思路先讲相对运动，再讲相对论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。