详细解答

STEP III 1995，第 10 题

力学 · 斜面上的抛体

> **STEP III 1995，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q10

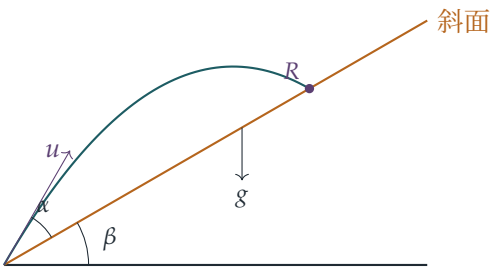
关键思路

在斜面（inclined plane）上，最自然的坐标轴不是水平和垂直方向，而是沿着斜面和垂直于斜面的方向。在这组坐标轴下，重力有两个恒定的分量，飞行时间（time of flight）单凭垂直于斜面的运动便可求得，而射程（range）则是三角函数的乘积。利用积化和差公式（factor formula）把这个乘积化为两个正弦之差，最大值便一目了然，完全不需要微积分。

解答

建立模型

把炮弹视为只受重力作用而自由运动的质点（particle），不计空气阻力，从斜面底部沿最大斜率线（line of greatest slope）向上发射。设发射方向与斜面的夹角为 α，则它相对于水平面的仰角（angle of elevation）为 $\theta = \alpha + \beta$；我们需要 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$，炮弹才会真正沿斜面向上飞行。



取 x-轴沿最大斜率线向上，y-轴垂直于斜面并指向离开斜面的一方。把加速度 g（铅垂向

下）沿这两个方向分解，得

$$\ddot{x} = -g\sin\beta, \qquad \ddot{y} = -g\cos\beta,$$

而初速度沿斜面的分量为 $u\cos\alpha$，垂直于斜面的分量为 $u\sin\alpha$。因此在时间 t 时

$$x = ut\cos\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\beta, \qquad y = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2\cos\beta.$$

飞行时间与射程

当 $t > 0$ 而再次有 $y = 0$ 时，炮弹着地：

$$T = \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}.$$

于是炮弹沿斜面向上所走的距离为

$$\begin{aligned} R = x(T) &= \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g\cos\beta} - \tfrac{1}{2}g\sin\beta\cdot\frac{4u^2\sin^2\alpha}{g^2\cos^2\beta} \\ &= \frac{2u^2\sin\alpha}{g\cos^2\beta}\left(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\right) \\ &= \frac{2u^2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}. \end{aligned}$$

想一想 怎样才能不用求导而求出 $\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$ 的最大值?

在积化和差公式 $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ 中取 $A = \alpha$ 和 $B = \alpha+\beta$，得

$$2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta,$$

所以

$$R = \frac{u^2\left(\sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta\right)}{g\cos^2\beta}.$$

只有 $\sin(2\alpha+\beta)$ 这一项与 α 有关，而它最大只能是 1。当 α 取遍 $(0, \frac{\pi}{2}-\beta)$ 时，角 $2\alpha+\beta$ 取遍 $(\beta, \pi-\beta)$，而这个区间包含 $\frac{\pi}{2}$；所以最大值 1 确实可以取到，而且恰好在 $2\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ 时取到，即

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}, \qquad \text{等价地} \qquad \theta = \alpha+\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

因此大炮应以高于水平面 $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ 的角度发射：发射方向平分斜面与铅垂线之间的夹角。

最大射程

取 $\sin(2\alpha+\beta) = 1$，并利用 $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = (1-\sin\beta)(1+\sin\beta)$，

$$R_{\max} = \frac{u^2(1-\sin\beta)}{g(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)},$$

其中由于 $\beta < \frac{\pi}{2}$，约去 $1-\sin\beta$ 是合理的。这就是所求的距离。

验算

- 平地，即 $\beta = 0$：最佳角度是 $45°$，射程为 u^2/g，正是大家熟悉的结果。
- 当 $\beta \to \frac{\pi}{2}$（一个铅垂的“斜面”）时，最佳方向趋向垂直向上，而 $R_{\max} \to u^2/(2g)$，即垂直向上发射的炮弹所能达到的最大高度。
- 数值上，取 $u = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 和 $\beta = 30°$，公式给出在仰角 $60°$ 时 $R_{\max} \approx 27.18\,\mathrm{m}$。在水平和垂直坐标下逐步计算炮弹的运动，直至它穿过斜面，对随机选取的 u, β, α 都能重现 $R(\alpha)$；再对 α 作精细搜索，最大值确实出现在 $\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$。

常见错误

- 混淆了与水平面的夹角和与斜面的夹角；答案 $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ 是从水平面量起的。
- 遗漏了沿斜面方向的分量 $-g\sin\beta$，结果得到的只是比例出错的平地射程公式。

STEP 之外

这个问题有一个优雅的几何看法：从同一点以速率 u 发射的所有轨迹，都位于一条“安全抛物线”（parabola of safety，即这些轨迹的包络线（envelope））之内，其焦点（focus）就在发射点，而任何斜面上的最大射程，就在斜面与这条抛物线相交之处。利用焦点–准线（directrix）性质，一行便可得出 $R_{\max} = u^2/(g(1+\sin\beta))$，同时解释了为何最佳方向平分斜面与铅垂线之间的夹角。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）以向量（vector）方法处理抛体（projectile）问题，是进一步学习的好选择。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。