详细解答

STEP III 1995，第 1 题

纯数学 · 联立线性方程

STEP III 1995，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s3-q1

关键思路

第二条和第三条方程的 y 项和 z 项完全相同，所以两式相减便可一次过消去两个未知数，只剩下一条关于 x 的方程。这道题的重点，大部分在于找出 a 和 b 取哪些值时，这一步或其后的某次除法会失效。系数的行列式（determinant）能预先告诉我们这些值在哪里，所以我们先把它算出来，然后逐一处理每个例外情况。

解答

把方程编号为

$$a^2x + ay + z = a^2 \tag{1}$$

$$ax + y + bz = 1 \tag{2}$$

$$a^2bx + y + bz = b. \tag{3}$$

哪里会出问题?

把系数矩阵（coefficient matrix）的行列式沿第一行展开，

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ a^2b & 1 & b \end{vmatrix} = a^2(b-b) - a(ab - a^2b^2) + (a - a^2b)$$

$$= a^3b^2 - 2a^2b + a = a(ab-1)^2.$$

所以除非 $a = 0$ 或 $ab = 1$，否则方程组恰有一个解。在这两种情况下，方程组要么无解，要么有无限多个解，我们必须回到方程本身才能判断是哪一种。

一般情况：$a \neq 0$ 且 $ab \neq 1$

由 (3) 减去 (2)，便可消去 y 和 z：

$$(a^2b - a)x = b - 1, \qquad \text{即} \qquad a(ab-1)\,x = b - 1.$$

由于 $a \neq 0$ 且 $ab \neq 1$，我们可以相除，得

$$x = \frac{1-b}{a(1-ab)}.$$

接着，由 (1) 得 $z = a^2 - a^2x - ay$。把它代入 (2)：

$$ax + y + a^2b - a^2bx - aby = 1 \quad \Longrightarrow \quad (1-ab)\,y = (1 - a^2b) - ax(1-ab).$$

除以 $1 - ab \neq 0$，并利用 $ax = \dfrac{1-b}{1-ab}$，

$$y = \frac{1-a^2b}{1-ab} - \frac{1-b}{1-ab} = \frac{b-a^2b}{1-ab} = \frac{b(1-a^2)}{1-ab}.$$

最后，

$$\begin{aligned} z = a^2 - a(ax) - ay &= a^2 - \frac{a(1-b)}{1-ab} - \frac{ab(1-a^2)}{1-ab} \\ &= \frac{a^2 - a^3b - a + ab - ab + a^3b}{1-ab} = \frac{a(a-1)}{1-ab}. \end{aligned}$$

所以当 $a \neq 0$ 且 $ab \neq 1$ 时，唯一解为

$$\boxed{x = \frac{1-b}{a(1-ab)}, \qquad y = \frac{b(1-a^2)}{1-ab}, \qquad z = \frac{a(a-1)}{1-ab}.}$$

$a = 0$ 的情况

方程变成

$$z = 0, \qquad y + bz = 1, \qquad y + bz = b,$$

所以 $z = 0$，$y = 1$，而最后一条方程则表示 $1 = b$。因此：

- 若 $a = 0$ 且 $b \neq 1$，方程组**无解**；
- 若 $a = 0$ 且 $b = 1$，解为 $x = \lambda$，$y = 1$，$z = 0$，其中 λ 为任意实数：这些解构成一条直线，因为 x 已不再出现在任何一条方程之中。

$ab = 1$ 的情况（故 $a \neq 0$）

想一想 当 $ab = 1$ 时，方程 $a(ab-1)x = b-1$ 的左方等于 0。这告诉我们甚么？

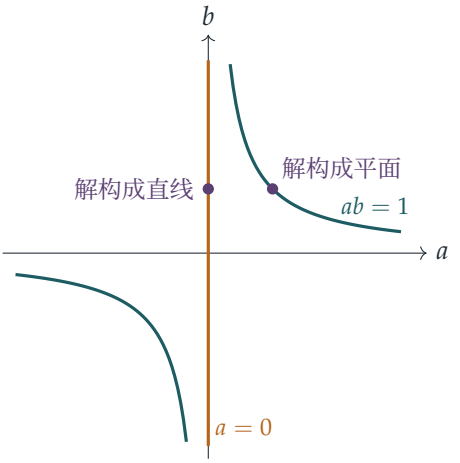
由 (3) 减去 (2) 这一步仍然成立；它现在变成 $0 = b-1$。所以若 $b \neq 1$，方程组便不相容（inconsistent）。在 $ab = 1$ 之下，条件 $b = 1$ 必然令 $a = 1$。因此：

- 若 $ab = 1$ 且 $a \neq 1$，方程组**无解**；
- 若 $a = b = 1$，三条方程全都变成 $x + y + z = 1$，所以解为 $x = \lambda, y = \mu, z = 1 - \lambda - \mu$，其中 λ, μ 为任意实数：这些解构成一整个平面。

这与行列式中的平方因子 $(ab-1)^2$ 吻合。在 $a = b = 1$ 时，矩阵的秩（rank）一直降至 1，所以有两个自由参数；而在 $a = 0$、$b = 1$ 时，矩阵的秩为 2，只有一个自由参数。

总结

下图所示为 (a, b) 平面。在直线 $a = 0$ 和双曲线（hyperbola）$ab = 1$ 以外，方程组有唯一解。在这两条线上，除了两个标示出来的点之外，方程组无解。



- $a \neq 0$，$ab \neq 1$：上面方框内的唯一解。
- $a = 0$，$b = 1$：$(x, y, z) = (\lambda, 1, 0)$，$\lambda \in \mathbb{R}$。
- $a = b = 1$：$(x, y, z) = (\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu)$，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$。
- $a = 0$ 而 $b \neq 1$，或 $ab = 1$ 而 $a \neq 1$：无解。

验算

取 $a=2$，$b=3$。公式给出 $x=\frac{1}{5}$，$y=\frac{9}{5}$，$z=-\frac{2}{5}$，而确实有 $4\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{9}{5}-\frac{2}{5}=4=a^2$，$\frac{2}{5}+\frac{9}{5}-\frac{6}{5}=1$ 以及 $\frac{12}{5}+\frac{9}{5}-\frac{6}{5}=3=b$。另一个快捷的测试是取 $b=1$，$a\neq 0,1$：公式给出 $x=0$，$y=1+a$，$z=-a$，而这些值满足全部三条方程。我们亦以精确的有理数运算，对 2000 组随机选取的 (a,b) 检验过行列式和一般公式。

常见错误

- 未有先把 $a=0$ 和 $ab=1$ 分开处理，便除以 $a(ab-1)$。题目说“对所有可能的值”，意思就是特殊情况正是这道题的重点所在。
- 声称“行列式为零，所以无解”。行列式为零只排除了唯一解的可能；在这道题中，有两组特殊的参数值会给出无限多个解。
- 忽略了 $ab=1$ 与 $b=1$ 同时成立必然令 $a=1$，所以双曲线上只有一个特殊点。

STEP 之外

这是一个小例子，说明矩阵的秩如何支配一个线性方程组（linear system）。方程组相容，当且仅当系数矩阵与增广矩阵（augmented matrix）的秩相同；这时所有解构成一个维数（dimension）为 $3-$ 秩 的集合。这就是为甚么我们得到的是单独一点、一条直线或一个平面。高斯消去法（Gaussian elimination）令这一切变得有系统，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）则以大量例题详细阐述这个课题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。