详细解答

STEP II 1995，第 9 题

力学 · 摩擦力与平衡

STEP II 1995，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

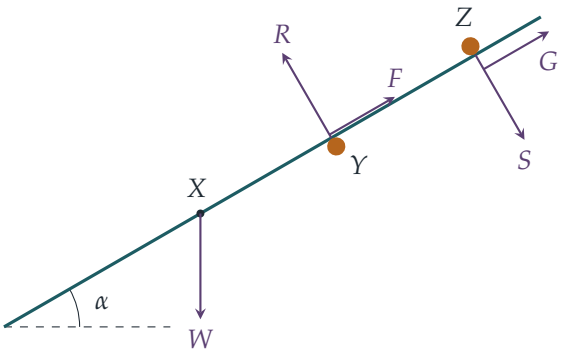
step.maths.org/questions/95-s2-q9

关键思路

杆沿着一条最大斜率线（line of greatest slope）放置，所以很自然会沿杆的方向和垂直于杆的方向分解（resolve）各力。杆搁在其上的那根横杆把它向上推，使它离开平面；杆从其下穿过的那根横杆则只能把它向下推。对 Y 取力矩（moment），便可知道杆的中心必须在哪里；然后令两个摩擦力（friction）都沿斜面向上并达到极限值（limiting value），就得到 μ 的最小值。

解答

我们把杆看成一根重量为 W 的均匀刚性杆（uniform rigid rod），把两根横杆看成固定的细杆，各自对杆施加一个垂直于杆的法向反作用力（normal reaction）和一个沿杆方向的摩擦力。由于杆与两根水平横杆都垂直，它便沿着两根横杆所在平面的一条最大斜率线放置，因此它与水平面的夹角为 α。设 R 为在 Y 处的反作用力（把杆推离平面，因为杆搁在这根横杆之上），S 为在 Z 处的反作用力（把杆推向平面，因为杆在这根横杆之下），其中 $R, S \geq 0$。设 F 和 G 分别为在 Y 和 Z 处的摩擦力，以沿斜面向上为正。



中心必须在哪里

沿垂直于杆的方向分解，并对 Y 取力矩（距离沿杆量度）：

$$R = S + W\cos\alpha,$$
$$S\,d = W\cos\alpha \cdot XY.$$

S 对 Y 的力矩，必须由重量分量 $W\cos\alpha$ 的力矩抵消，而这个分量与 S 一样指向平面。两个方向相同的平行力，只有分别作用在 Y 的两侧时，它们对 Y 的力矩才可以互相抵消。由于 Z 在 Y 的斜面上方，中心 X 必须在 Y 处或在 Y 的下方，于是

$$XZ = XY + YZ, \qquad \text{所以} \qquad l = XY + d \geq d.$$

（假如 X 在 Y 与 Z 之间，或在 Z 之外，力矩方程便会迫使 $S < 0$：在 Z 处的横杆就要把杆拉住，但它做不到，杆便会转动而离开这根横杆。）等式 $l = d$ 是临界情况，此时 X 位于 Y 而 $S = 0$。

想一想 试卷上写的是 $l \leq d$。为甚么我们得到相反的不等式?

试卷上的不等式（inequality）是印刷错误：题目本身接着取 $l = 2d$，而这只有在 $l \geq d$ 时才可能。上面的论证说明，平衡（equilibrium）所要求的正是 $l \geq d$，我们以下就用这个条件。

μ 的最小值

以 $XY = l - d$ 代入，两条方程给出

$$S = \frac{W\cos\alpha\,(l-d)}{d}, \qquad R = \frac{W\cos\alpha\,l}{d}, \qquad \text{所以} \qquad R + S = \frac{W\cos\alpha\,(2l-d)}{d}.$$

沿杆的方向分解，摩擦力必须承托重量沿斜面向下的分量：

$$F + G = W\sin\alpha.$$

摩擦定律要求 $|F| \le \mu R$ 及 $|G| \le \mu S$，所以 $F+G \le \mu(R+S)$。因此平衡需要

$$W\sin\alpha \le \mu\,\frac{W\cos\alpha\,(2l-d)}{d}, \qquad \text{即} \qquad \mu \ge \frac{d\tan\alpha}{2l-d}.$$

反过来，若 μ 等于这个值，则 $F=\mu R$ 和 $G=\mu S$（两者都沿斜面向上，两者都达到极限值）满足每一条方程，所以杆可以处于平衡。因此最小的可能值是

$$\mu_{\min} = \frac{d\tan\alpha}{2l-d}.$$

当 $l=2d$ 时，上式变成 $\mu_{\min} = \dfrac{d\tan\alpha}{3d} = \frac{1}{3}\tan\alpha$，所以 $\mu \ge \frac{1}{3}\tan\alpha$，正是所要证明的结果。

验算

- 当 $l=d$ 时，中心位于较低的横杆之上，$S=0$，我们得到 $\mu \ge \tan\alpha$：这正是单一质点（particle）静止在粗糙斜面上的熟悉条件。
- 当 $l\to\infty$ 时，反作用力无限增大，所以只需要极少的摩擦，而的确有 $\mu_{\min}\to 0$。
- 数值上，取 $\alpha=0.7$ 及 $l=2d$，公式给出 $0.28076\ldots$，即 $\frac{1}{3}\tan 0.7$。我们亦用电脑核对了对随机选取的点所列的力方程和力矩方程，并验证了平衡在略高于 $\mu_{\min}$ 时成立，在略低于它时则不成立。

常见错误

- 把两个反作用力取成同一方向。杆从其下穿过的那根横杆，只能把杆推向平面。
- 假设只有一根横杆处的摩擦达到极限。要令 μ 尽可能小，两根横杆都必须提供最大的摩擦力，方向沿斜面向上。

STEP 之外

这是一道带有不等式约束的静力学（statics）小问题：接触力必须满足一组线性方程，同时满足摩擦不等式，而 μ 的最小值就是可行集（feasible set）刚好变成非空的那一点。同样的结构，即线性方程加上线性不等式，正是线性规划（linear programming）以及工程学中摩擦接触分析的基础。想进一步了解刚体静力学和摩擦，可参阅 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（一本大学力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。