详细解答

STEP II 1995，第 8 题

纯数学 · 逻辑斯谛微分方程

> **STEP II 1995，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q8

本题在 *Beyond STEP* 第 8.3 节收获种群中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/harvesting.html

关键思路

这条增长定律是一条逻辑斯谛方程（logistic equation），属于可分离变量（separable）的类型：利用部分分式（partial fractions），积分便化为两个对数。至于第二部分，把新方程右边配方（completing the square）后可见，平移 $y = x - K + \alpha$ 会把新方程变成完全相同的逻辑斯谛方程，只是以 α 取代了 K。因此我们可以直接沿用第一部分的答案，无须再做任何积分。

解答

没有移除时的种群

我们取 $K > 0$（种群由 $x = K$ 开始，故必有 $K > 0$）。方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (2K - x)x.$$

由 $x = K$ 出发，变化率为 $K^2 > 0$。解永远不会到达 $x = 0$ 或 $x = 2K$，因为这两个常数函数本身就是解，而这条方程的解不可能互相穿越。所以自始至终 $0 < x < 2K$，我们可以除以 $(2K - x)x$。写成部分分式，

$$\frac{1}{x(2K - x)} = \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2K - x}\right),$$

于是分离变量后得

$$\frac{1}{2K}\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2K-x}\right)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}t,$$
$$\frac{1}{2K}\Big(\ln x-\ln(2K-x)\Big)=t+C.$$

由于 x 和 $2K-x$ 均为正数，无须加上绝对值符号。在 $t=0$ 时，$x=2K-x=K$，故左边为 0，而 $C=0$。因此

$$\ln\frac{x}{2K-x}=2Kt\quad\Longrightarrow\quad x=(2K-x)\,\mathrm{e}^{2Kt}\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{2K\mathrm{e}^{2Kt}}{1+\mathrm{e}^{2Kt}}=\frac{2K}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}}.$$

为了配合题目要求的形式，写 $2=(1+\mathrm{e}^{-2Kt})+(1-\mathrm{e}^{-2Kt})$：

$$x(t)=\frac{K(1+\mathrm{e}^{-2Kt})+K(1-\mathrm{e}^{-2Kt})}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}}=K+K\,\frac{1-\mathrm{e}^{-2Kt}}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}},$$

这正是所需的结果。（等价地，$x=K+K\tanh Kt$。）

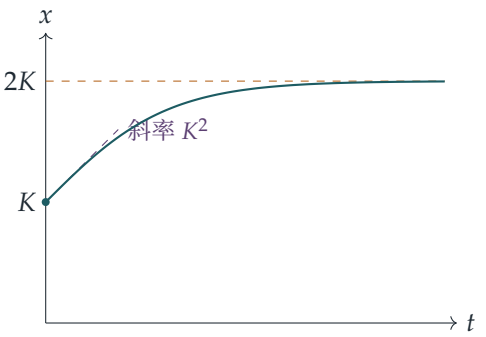
草图。 当 $t\geq 0$ 时，$\mathrm{e}^{-2Kt}\in(0,1]$，所以 $K\leq x<2K$。于是 $\dot{x}=(2K-x)x>0$，故 x 递增。把方程再求导一次，

$$\ddot{x}=(2K-2x)\,\dot{x}\leq 0\quad\text{因为}x\geq K,$$

所以图像是凹向下的（concave），在 $t=0$ 处的斜率为 K^2（该处 $\ddot{x}=0$：时间的原点正是整条 S 形逻辑斯谛曲线的拐点（point of inflection））。当 $t\to\infty$ 时，$\mathrm{e}^{-2Kt}\to 0$，所以

$$x(t)\to 2K.$$

种群数量在 $2K$ 处趋于平稳，从下方逼近它，但永远不会到达。



以速率 L 移除

每小时移除 L 微克，即是从变化率中减去 L：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(2K-x)x-L.$$

把右边配方：

$$(2K-x)x-L=-(x^2-2Kx)-L=K^2-L-(x-K)^2=\alpha^2-(x-K)^2,$$

其中 $\alpha=\sqrt{K^2-L}>0$，因为 $K^2>L$。

想一想 为甚么 $y=x-K+\alpha$ 是合适的代换?

右边 $\alpha^2-(x-K)^2$ 在 $x=K\pm\alpha$ 处为零，这就是两个平衡（equilibrium）种群数量。平移 $K-\alpha$ 会把较低的平衡点移到 0，而原来的逻辑斯谛方程的较低平衡点也正在那里。由 $x-K=y-\alpha$ 及 $\dot{y}=\dot{x}$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\alpha^2-(y-\alpha)^2=2\alpha y-y^2=(2\alpha-y)\,y.$$

这就是第一条方程，只是以 α 取代了 K。初始条件（initial condition）同样吻合：$x(0)=K$ 给出 $y(0)=\alpha$，正好对应原来的 $x(0)=K$。由于 $\alpha>0$，第一部分的论证可以一字不改地套用，于是

$$y(t)=\frac{2\alpha}{1+\mathrm{e}^{-2\alpha t}},\qquad \text{所以}\qquad x(t)=K-\alpha+\frac{2\alpha}{1+\mathrm{e}^{-2\alpha t}}.$$

当 $t\to\infty$ 时，$\mathrm{e}^{-2\alpha t}\to 0$，所以 $y\to 2\alpha$，而

$$x(t)\to K-\alpha+2\alpha=K+\alpha,$$

这正是所求。当 $L>0$ 时，$\alpha<K$，所以被收割的种群会稳定在较低的水平 $K+\alpha<2K$，一如所料。

验算

- 在 $t=0$ 时，两条公式都给出 $x=K$。设 $L=0$ 则 $\alpha=K$，第二条公式便化为 $2K/(1+\mathrm{e}^{-2Kt})$，即第一条公式。
- 对 $x=K+K\tanh Kt$ 求导，得 $\dot{x}=K^2\operatorname{sech}^2 Kt=K^2(1-\tanh^2 Kt)=(K-K\tanh Kt)(K+K\tanh Kt)=(2K-x)x$。
- 数值上，取 $K=1$，$x(1)=2/(1+\mathrm{e}^{-2})\approx 1.7616$；取 $K=1$ 及 $L=0.75$（故 $\alpha=\frac{1}{2}$），$x(1)\approx 1.2311$。两者都与直接以数值方法（龙格—库塔法，Runge–Kutta）求解微分方程所得的结果吻合，而且第二个解稳定在 $1.5=K+\alpha$。

常见错误

- 在部分分式中漏掉因子 $\frac{1}{2K}$，结果得出 e^{-t} 而不是 e^{-2Kt}。

- 在第二部分写成 $+L$，或者忘记积分常数（constant of integration）必须重新求出。这里的代换令 $y(0) = \alpha$，所以无须新的常数。

STEP 之外

第二部分让我们初次接触*平衡点的稳定性*（stability of equilibria）。方程 $\dot{x} = \alpha^2 - (x - K)^2$ 的平衡点在 $K \pm \alpha$：上面的一个吸引附近的解，下面的一个则排斥它们。只要看右边的正负号便可看出这一点，完全不用解方程。这种相线（phase line）方法，以及 $L > K^2$ 时的情况（没有平衡点，种群在有限时间内灭绝），可参阅 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。