详细解答

STEP II 1995，第 7 题

纯数学 · 希罗公式

> **STEP II 1995，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q7

关键思路

内切圆（incircle）是贯穿全题的主角。由圆心到各切点的半径都垂直于三角形的边，正好是把 ABC 铺满的三个小三角形的现成的高，由此便得 (i)。第 (ii) 部分是希罗公式（Heron's formula）的经典推导：写出 $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$，用余弦定理（cosine rule）消去角度，然后利用平方差（difference of two squares）分解因式，前后两次。至于球体，则要看一个垂直截面。球体与洞口各边的接触点，原来正正就是内切圆与三边相切的点。

解答

第 (i) 部分

设内切圆与 BC、CA 和 AB 分别相切于 P、Q 和 R'。通过切点的半径垂直于切线（tangent），所以 $IP \perp BC$、$IQ \perp CA$ 及 $IR' \perp AB$，而且每一条的长度都是 r。因此三角形 BIC 的底为 a，垂直高度为 r，其余两个三角形亦同理：

$$[BIC] = \tfrac{1}{2}ar, \qquad [CIA] = \tfrac{1}{2}br, \qquad [AIB] = \tfrac{1}{2}cr.$$

由于 I 位于三角形之内，这三个三角形恰好拼成 ABC，互不重叠。相加得

$$\Delta = \tfrac{1}{2}r(a+b+c) = rs,$$

正是所求。

第 (ii) 部分

把 $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ 平方，并利用 $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$，

$$\Delta^2 = \tfrac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2\alpha) = \tfrac{1}{16}[4b^2c^2 - (2bc\cos\alpha)^2],$$

这就是第一个结果。方括号内是一个平方差：

$$16\Delta^2 = (2bc - 2bc\cos\alpha)(2bc + 2bc\cos\alpha).$$

根据余弦定理，$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$。把它代入每个因式，

$$2bc - 2bc\cos\alpha = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b-c)^2,$$
$$2bc + 2bc\cos\alpha = (b^2 + 2bc + c^2) - a^2 = (b+c)^2 - a^2,$$

所以

$$\Delta^2 = \tfrac{1}{16}[a^2 - (b-c)^2][(b+c)^2 - a^2],$$

即第二个结果。每个方括号又是一个平方差：

$$16\Delta^2 = (a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a).$$

现在引入 s。由于 $a + b + c = 2s$，

$$b + c - a = 2(s - a), \qquad a - b + c = 2(s - b), \qquad a + b - c = 2(s - c),$$

所以该乘积为 $2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c) = 16\,s(s-a)(s-b)(s-c)$。因此 $\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$。由于 $\Delta > 0$，我们取正平方根：

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

第 (iii) 部分

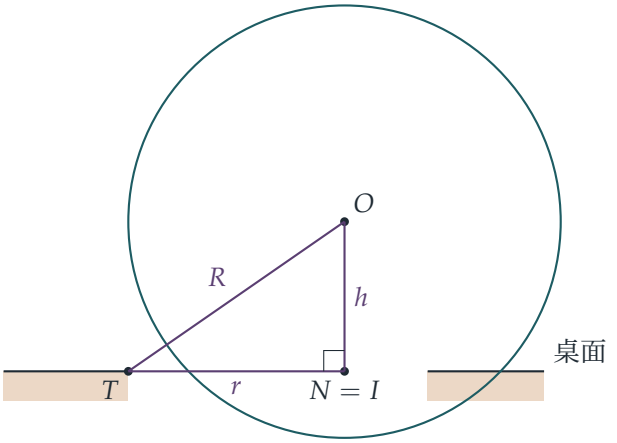
设 O 为球心，h 为球心高出桌面的高度。设 N 为由 O 到桌面所在平面的垂足（foot of the perpendicular），所以 $ON = h$。球体搁在洞口的三条边上。假设它与边 BC 相切于点 T。

> ? **想一想** 为甚么 N 必定是内心（incentre）I?

在球体与直线相切的点上，半径垂直于该直线，所以 $OT \perp BC$ 且 $OT = R$。此外，ON 垂直于整个桌面平面，所以 $ON \perp BC$。于是 BC 垂直于平面 ONT 内两条不平行的直线，因而垂直于该平面，当然也垂直于 NT。所以 NT 就是由 N 到 BC 的垂直距离，而在直角三角形 ONT 中运用毕氏定理（Pythagoras' theorem），得

$$NT^2 = R^2 - h^2.$$

对边 CA 和 AB 作同样的论证，可知 N 与三条边的距离同为 $\sqrt{R^2 - h^2}$。点 N 位于三角形之内（球体坐落在洞口之上），而三角形内与三边等距的点只有内心一个。所以 $N = I$，这个共同的距离就是 r，而各接触点正是内切圆与三边相切之处。这些点都在边本身之上，而不是在边的延线上，所以球体确实是搁在三条边上。



上图显示通过 O 和 T 的垂直截面；边 BC 穿过 T，垂直于纸面。在三角形 ONT 中运用毕氏定理，现在得到 $h^2 = R^2 - r^2$。由 (i) 和 (ii)，

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}, \qquad \text{所以} \qquad r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}.$$

因此球心高出桌面的高度为

$$h = \sqrt{R^2 - \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

。这需要 $R > r$：不比内切圆大的球体会直接穿过洞口掉下去。

验算

取 3–4–5 三角形：$s = 6$，希罗公式给出 $\Delta = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$，与 $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$ 吻合。于是 $r = \Delta/s = 1$，你可以用直角三角形的公式 $r = \frac{1}{2}(3 + 4 - 5)$ 加以核实。当 $R = 2$ 时，公式给出 $h = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \approx 1.732$。当 $R \to r^+$ 时，$h \to 0$：球体不断下沉，直至其赤道与桌面齐平，并搁在内切圆上。作为更全面的检验，我们以数值方法测试了 18,816 个随机三角形。在每一个情况中，置于内心上方高度 h 处的球心，与三条边所在直线的距离都恰好是 R，而且最近的点都落在边之内。

常见错误

- 取 $h = \sqrt{R^2 - d^2}$，其中 d 是由 I 到某个顶点的距离。球体接触的是边，而不是角。
- 毫无理由地假设球心位于内心的正上方。这需要用上述的垂直论证，或者至少要给出清晰的对称理由。
- 在 (ii) 中把因式的配对弄错：$b + c - a = 2(s - a)$，而不是 $2(s - b)$ 或 $2(s - c)$。

STEP 之外

希罗公式属于一系列关于面积和体积的对称公式。婆罗摩笈多（Brahmagupta）公式对圆内接四边形（cyclic quadrilateral）起着同样的作用，而凯莱—门格行列式（Cayley–Menger determinant）则可由四面体的六条棱长求出其体积。“半径 $\perp$ 切线，所以垂足就是内心”这一步，是三垂线定理（theorem of the three perpendiculars）的三维版本，在向量几何中很值得掌握。想找更多这类题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。