详细解答

STEP II 1995，第 6 题

纯数学 · 单位根

> **STEP II 1995，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q6

关键思路

七次单位根（roots of unity）是 $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^6$，它们的和为零。把六个非实数的根分成两组，每组三个：$\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\}$ 和 $\{\alpha^3, \alpha^5, \alpha^6\}$。第二组正好是第一组各数的共轭复数（complex conjugate），所以两组的和互为共轭。因此它们的和与积都是实数，而第一部分的结果把这两个数变成二次式的系数。再取该根的实部和虚部，便得到所求的三角和。

解答

根与系数

若 u 和 v 是 $z^2 + az + b = 0$ 的根，则首一（monic）二次式 $z^2 + az + b$ 有因式 $z - u$ 和 $z - v$，所以对所有 z 都有

$$z^2 + az + b = (z - u)(z - v) = z^2 - (u + v)z + uv$$

。比较 z 的系数和常数项，得 $a = -u - v$ 及 $b = uv$，这正是所要证明的。

单位根

先提醒一点。试卷上印的是 $z^6 - 1 = 0$，但这是 $z^7 - 1 = 0$ 的误印。事实上，$\alpha^6 = \cos(12\pi/7) + \mathrm{i}\sin(12\pi/7) \neq 1$，而题目其余部分显然都与七次有关。我们以 $z^7 - 1 = 0$ 来解题。

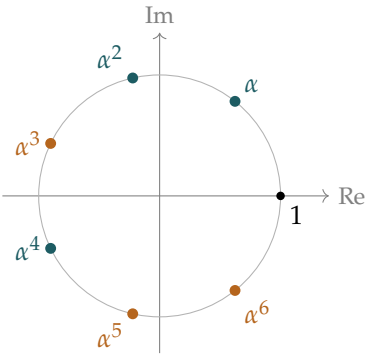
由棣美弗定理（de Moivre's theorem），

$$\alpha^7 = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1,$$

所以 α 是 $z^7-1=0$ 的根。更一般地，$\alpha^k=\cos(2k\pi/7)+\mathrm{i}\sin(2k\pi/7)$，而且 $(\alpha^k)^7=(\alpha^7)^k=1$。以下七个数

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \alpha^6$$

互不相同，因为它们的辐角（argument）$2k\pi/7$（$k=0,\dots,6$）在 $[0,2\pi)$ 内互不相同。7 次多项式最多有 7 个根，所以这些就是 $z^7-1=0$ 的全部根。它们位于单位圆上一个正七边形的顶点。



整个解答全靠两个事实。第一，各根之和为零：$z^7-1=(z-1)(z^6+z^5+\cdots+z+1)$，而 $\alpha\neq1$，所以

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=0. \qquad (*)$$

（等价的说法是：z^7-1 中 z^6 的系数为零。）第二，由于 $|\alpha|=1$，我们有 $\overline{\alpha^k}=\alpha^{-k}=\alpha^{7-k}$。所以 $\alpha^6=\overline{\alpha}$、$\alpha^5=\overline{\alpha^2}$ 及 $\alpha^3=\overline{\alpha^4}$。

求 A 和 B

设

$$p=\alpha+\alpha^2+\alpha^4,\qquad q=\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6.$$

由上面的共轭配对，$q=\overline{p}$。这正是对另一个根最自然的猜想：一个实系数二次式若有非实数根 p，则 $\overline{p}$ 也必定是它的根。

> **想一想** 我们怎样知道 p 不是实数？假如它是实数，“另一个根”就不一定是 $\overline{p}$ 了。

p 的虚部是 $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$，我们会在最后证明它是正数。所以 p 不是实数，而两个根就是 p 和 $\overline{p}=q$。（无论如何，只要找到实数 A 和 B，使 p 和 q 为根，这个二次式便已确定。）

由 $(*)$，

$$p+q=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=-1.$$

至于乘积，先展开，再利用 $\alpha^7 = 1$ 把各幂次化简：

$$\begin{aligned} pq &= (\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)(\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6) \\ &= \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^5 + \alpha^7 + \alpha^8 + \alpha^7 + \alpha^9 + \alpha^{10} \\ &= \alpha^4 + \alpha^6 + 1 + \alpha^5 + 1 + \alpha + 1 + \alpha^2 + \alpha^3 \\ &= 3 + (\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6) = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

留意在这九项之中，除了三个 1 之外，$\alpha, \ldots, \alpha^6$ 每个都恰好出现一次。由第一部分，$A = -(p+q)$ 及 $B = pq$，所以

$$A = 1, \qquad B = 2,$$

而 p 和 q 是 $z^2 + z + 2 = 0$ 的根，即

$$z = \frac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}.$$

三角和

取 $p = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ 的实部和虚部，并利用 $\alpha^k = \cos(2k\pi/7) + \mathrm{i}\sin(2k\pi/7)$，得

$$\operatorname{Re} p = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7},$$
$$\operatorname{Im} p = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}.$$

$z^2 + z + 2 = 0$ 的两个根的实部都是 $-\frac{1}{2}$，所以

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2},$$

这正是所要证明的。（另一做法：由 $p + \overline{p} = -1$ 可直接得出 $2\operatorname{Re} p = -1$。）

虚部是 $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$，我们必须判断是哪一个。

> **想一想** 三个正弦值之中两个是正数，一个是负数。我们怎样才能肯定哪一方占优？

把负的那一项与其中一个正项比较。由于 $\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}$，我们有 $\sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$。此外，$\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right) = \sin\frac{3\pi}{7}$。正弦函数在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上严格递增（strictly increasing），而 $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\frac{3\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$。因此

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \underbrace{\sin\frac{2\pi}{7}}_{>0} + \underbrace{\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right)}_{>0} > 0,$$

从而

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

这亦确认了 $p = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ 不是实数，正如我们在上面所用到的。

验算

用计算机（以弧度计算），$\cos\frac{2\pi}{7}\approx 0.6235$、$\cos\frac{4\pi}{7}\approx -0.2225$ 及 $\cos\frac{8\pi}{7}\approx -0.9010$，三者相加得 -0.5000。三个正弦值约为 0.7818、0.9749 和 -0.4339，相加得 1.3229。这与 $\frac{\sqrt{7}}{2}\approx 1.3229$ 吻合。你也可以直接验证 $p^2+p+2=0$：取 $p=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$，则 $p^2=\frac{-6-2\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$，由此即得 $p^2+p+2=0$。

常见错误

- 照试卷所印使用 $z^6-1=0$。这样 α 便不是根，而“和为零”这个事实 $(*)$ 亦不成立。
- 展开 pq 时忘记用 $\alpha^7=1$ 化简幂次，或数错了等于 1 的那三项。
- 声称正弦之和是正数，“因为有两项是正数”。你需要作出比较，例如 $\sin\frac{3\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}$。

STEP 之外

$\{1,2,4\}$ 与 $\{3,5,6\}$ 这个分法并非随意。$1,2,4$ 这三个数正是模 7 的非零平方数，而 $2p+1=\mathrm{i}\sqrt{7}$ 是一个*高斯和*（Gauss sum）。高斯（Gauss）证明了：对于形如 $4k+3$ 的质数 ℓ，α^r 对所有二次剩余（quadratic residue）r 求和，结果是 $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{\ell}}{2}$。这是两套理论的第一步：一是关于哪些正多边形可以用尺规作图的理论（伽罗瓦理论，Galois theory），二是二次互反律（quadratic reciprocity）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 讲述二次剩余，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis* 则从几何角度看单位根。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。