详细解答

STEP II 1995，第 5 题

纯数学 · 最优化与凹性

STEP II 1995，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

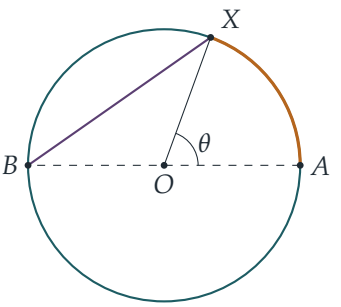
step.maths.org/questions/95-s2-q5

关键思路

选择 (i) 和 (iii) 正是 (ii) 这一族路线的两个极端：$\theta \to 0$ 表示直接游过对岸，$\theta \to \pi$ 表示全程跑步。因此我们把总时间写成 θ 在 $[0, \pi]$ 上的函数，再问它的最小值在哪里。出人意表的是，这个函数是凹函数（concave function），所以它唯一的驻点（stationary point）是极大点，而最佳路线永远在其中一端。

解答

取泳池的半径为 1 个长度单位，她的游泳速率为 1，于是她跑步的速率为 k。这样时间便以（半径）/（游泳速率）为单位，这并不影响任何比较。



三个时间

(i) 她游过直径 AB，长度为 2，需时 2。

(iii) 她跑过一个半圆，长度为 π，需时 π/k。

(ii) 她跑过弧 AX，长度为 θ（半径为 1），需时 θ/k。由于 $\angle AOB = \pi$，我们有 $\angle XOB = \pi - \theta$。三角形 XOB 是等腰三角形，其中 $OX = OB = 1$，所以弦（chord）长为

$$XB = 2\sin\tfrac{\pi-\theta}{2} = 2\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

（另一个等价的做法：因为 AB 是直径，所以 $\angle AXB = \frac{\pi}{2}$；又由等腰三角形 AOX 得 $\angle XAB = \frac{\pi-\theta}{2}$，所以 $XB = 2\sin\angle XAB$。）她的总时间为

$$T(\theta) = \frac{\theta}{k} + 2\cos\frac{\theta}{2}, \qquad 0 < \theta < \pi.$$

这条公式在两端同样成立：$T(0) = 2$ 是 (i) 的时间，而 $T(\pi) = \pi/k$ 是 (iii) 的时间。因此，三个选择全部可以用 $[0, \pi]$ 上的同一个连续函数来描述。

T 在哪里最小？

求导数，得

$$T'(\theta) = \frac{1}{k} - \sin\frac{\theta}{2}, \qquad T''(\theta) = -\tfrac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

当 $0 < \theta < \pi$ 时，我们有 $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$，从而 $T''(\theta) < 0$：函数 T 在 $[0, \pi]$ 上是严格凹（strictly concave）的。

> ? **想一想** 若 $k > 1$，在 $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{k}$ 处有一个驻点。那不就是最佳的下水位置吗？

不是：由于在该处 $T'' < 0$，它是一个极大点，是最差的下水位置。更一般地说，闭区间上的严格凹函数，其图像严格位于连接两端函数值的弦之上，所以对每一个满足 $0 < \theta < \pi$ 的 θ，

$$T(\theta) > \Big(1 - \frac{\theta}{\pi}\Big)T(0) + \frac{\theta}{\pi}\,T(\pi) \geq \min(T(0),\, T(\pi)).$$

所以无论 k 取甚么值，把 X 选在中途的任何位置，都及不上 (i) 和 (iii) 之中较快的那一个。（若 $k \leq 1$，我们可以更直接地看出这一点：这时在 $(0, \pi)$ 上 $T'(\theta) > 0$，因为 $\sin\frac{\theta}{2} < 1 \leq \frac{1}{k}$，所以 T 是递增的，立即下水游泳便是最佳选择。）

比较 (i) 和 (iii)

余下只需比较 $T(0) = 2$ 与 $T(\pi) = \pi/k$：

- 若 $k < \frac{\pi}{2}$，则 $\pi/k > 2$，所以她应该**直接游过去**，即选择 (i)；
- 若 $k > \frac{\pi}{2}$，则 $\pi/k < 2$，所以她应该**全程绕着池边跑**，即选择 (iii)；
- 若 $k = \frac{\pi}{2}$，(i) 和 (iii) 所需时间相同，两者皆为最佳。

背后的物理原因很简单：半圆的长度是直径的 $\frac{\pi}{2}$ 倍。

最后，选择 (ii) 是她永远不会采用的：对每一个 $k > 0$ 和每一个 $\theta \in (0, \pi)$，它都严格地慢于 (i) 和 (iii) 之中较快的那一个。

验算

取 $k = 3$，跑步需时 $\pi/3 \approx 1.047$，胜过游泳的 2；驻点位于 $\theta = 2\arcsin\frac{1}{3} \approx 0.680$，该处 $T \approx 2.112$，比两端都慢，正是极大点应有的表现。用电脑在 e^{-4} 与 e^{4} 之间随机抽取数千个 k，并在细密的 θ 网格上计算 T，从未发现区间内部有任何值低于 $\min(2, \pi/k)$，同时确认了分界点在 $k = \pi/2 \approx 1.571$。

常见错误

- 令 $T'(\theta) = 0$ 后，没有检查驻点的性质便宣称所得结果是最优解：这里它其实是极大点。
- 用了弧 XB 而不是弦，或者把弦长算成 $2\sin\frac{\theta}{2}$（那是 AX，不是 XB）。
- 忘记了 $k \le 1$ 的情况，这时根本没有驻点。

STEP 之外

这里起作用的原理是：区间上的凹函数必在端点取得最小值；在更高维度，这变成以下事实：线性（或凹）目标函数在多边形上的最小值必在顶点取得，而这正是线性规划（linear programming）的基础。这道题也是斯涅尔定律（Snell's law）和费马（Fermat）最短时间原理的近亲，不过在那些情况下，答案通常是内点，因为时间函数反而是凸（convex）的。想做更多这类风格的题目，可以试试 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。