详细解答

STEP II 1995，第 4 题

纯数学 · 沃利斯归约公式

STEP II 1995，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s2-q4

本题在 *Beyond STEP* 第 4.4 节沃利斯、*Beta* 与二分之一的阶乘中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/wallis-beta.html

关键思路

利用分部积分法（integration by parts），可把 $\cos^2 t$ 化为 $1-\sin^2 t$，从而得到一条把 u_n 与 u_{n-2} 联系起来的归约公式（reduction formula）。把这条公式乘以 u_{n-1}，可见 nu_nu_{n-1} 不随 n 增大而改变，所以它等于 $n=1$ 时的值。余下的就是夹逼（squeeze）：由于各 u_n 递减，乘积 u_nu_{n-1} 介乎 u_n^2 与 u_{n-1}^2 之间。

解答

归约公式

设 $n \geq 2$。我们把积分写成 $u_n = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \sin^{n-1} t \, \mathrm{d}t$，然后分部积分：对 $\sin^{n-1} t$ 求导，并把 $\sin t$ 积分为 $-\cos t$：

$$\begin{aligned} u_n &= \Big[-\cos t \, \sin^{n-1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, \sin^{n-2} t \, \mathrm{d}t \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)\sin^{n-2} t \, \mathrm{d}t \\ &= (n-1)(u_{n-2} - u_n). \end{aligned}$$

边界项等于零，因为在上限有 $\cos\frac{\pi}{2} = 0$，在下限有 $\sin 0 = 0$（这里用到 $n-1 \geq 1$）。把含 u_n 的项合并，得

$$nu_n = (n-1)u_{n-2} \qquad (n \geq 2).$$

两边同乘以 u_{n-1}，得

$$nu_nu_{n-1} = (n-1)u_{n-1}u_{n-2} \qquad (n \geq 2),$$

这正是所需的结果。

恒定的乘积

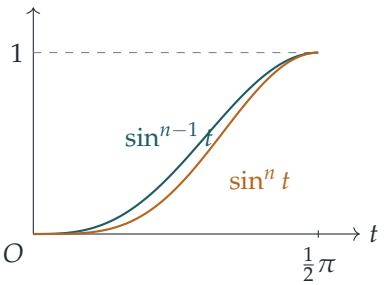
对 $n \geq 1$，记 $p_n = nu_nu_{n-1}$。上面的结果说明，对每个 $n \geq 2$ 都有 $p_n = p_{n-1}$，所以对每个 $n \geq 1$ 都有 $p_n = p_1$。现在

$$u_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad u_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos t\Big]_0^{\pi/2} = 1,$$

所以 $p_1 = 1 \cdot u_1u_0 = \frac{1}{2}\pi$。因此

$$nu_nu_{n-1} = \tfrac{1}{2}\pi \qquad \text{对所有} n \geq 1.$$

草图与 $0 < u_n < u_{n-1}$



两条曲线在 $t = 0$ 时都由 0 出发，一直递增，并在 $t = \frac{1}{2}\pi$ 处达到 1（草图所示为 $n = 4$ 的情况；当 $n = 1$ 时，上方的曲线是直线 $y = 1$）。对 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$，我们有 $0 < \sin t < 1$，所以

$$0 < \sin^n t = \sin t \cdot \sin^{n-1} t < \sin^{n-1} t.$$

因此，除了两个端点之外，$\sin^n t$ 的图像严格位于 $\sin^{n-1} t$ 的图像之下。两个函数都是连续（continuous）的，所以它们之下的面积满足

$$0 < u_n < u_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

? **想一想** 两条曲线在端点处相接，为甚么不等式仍然是严格的?

差 $\sin^{n-1} t - \sin^n t$ 是连续的，永不为负，而且在（例如）$t = \frac{1}{4}\pi$ 处为正。一个连续函数若在某一点为正，则在该点附近的一个小区间上也为正，所以它围出的面积为正。在两个孤立点处相接，并不会改变这个结论。同样的论证可证明 $u_n > 0$。

双边界限

设 $n \geq 1$。由于 $u_n > 0$，把 $u_n < u_{n-1}$ 乘以 nu_n，得 $nu_n^2 < nu_n u_{n-1}$。由于 $u_{n-1} > 0$，乘以 nu_{n-1}，得 $nu_n u_{n-1} < nu_{n-1}^2$。中间的量是 $\frac{1}{2}\pi$，所以

$$nu_n^2 < \tfrac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2 \qquad (n \geq 1).$$

夹逼与极限

右边的不等式对每个 $n \geq 1$ 都成立，所以我们可以用 $n+1$ 代替 n：

$$\tfrac{1}{2}\pi < (n+1)u_n^2, \qquad \text{所以} \qquad nu_n^2 > \frac{n}{n+1} \cdot \tfrac{1}{2}\pi.$$

把它与左边的不等式结合，得

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)\tfrac{1}{2}\pi < nu_n^2 < \tfrac{1}{2}\pi.$$

当 $n \to \infty$ 时，$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$，所以下界趋向 $\frac{1}{2}\pi$。上界本身就是 $\frac{1}{2}\pi$。根据夹逼定理（squeeze theorem，又称 sandwich theorem），

$$nu_n^2 \to \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{当} n \to \infty.$$

验算

- 归约公式给出 $u_2 = \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{4}\pi$，这与 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\pi$ 吻合（$\sin^2$ 的平均值是 $\frac{1}{2}$）。于是 $2u_2u_1 = \frac{1}{2}\pi$，与预期一致。
- 以数值方法（辛普森法则，Simpson's rule）计算，$u_{10} \approx 0.38656$，即 $\frac{63}{512}\pi$。所以 $10u_{10}^2 \approx 1.4943$，介乎 $\frac{10}{11} \cdot \frac{1}{2}\pi \approx 1.4280$ 与 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.5708$ 之间。
- 把递推关系（recursion）一直算到 $n = 10^5$，得 $nu_n^2 \approx 1.570788$，已经非常接近 $\frac{1}{2}\pi$。

常见错误

- 忘记归约公式需要 $n \geq 2$，所以常数必须用 u_0 和 u_1 来确定，而不能只用 u_1 和 u_2。
- 单凭 $\sin^n t \leq \sin^{n-1} t$ 就断言 $u_n < u_{n-1}$。这样只能得到 $\leq$；要得到严格不等式，被积函数的不等式必须在某个区间上严格成立。
- 试图直接由 $\frac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2$ 得出下界。这条不等式限制的是 u_{n-1}，而不是 u_n，所以要先把下标移位。

STEP 之外

这些积分称为沃利斯（Wallis）积分。把 u_{2m} 和 u_{2m+1} 写成乘积，再利用 $nu_n^2 \to \frac{1}{2}\pi$，便可得出沃利斯乘积 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots$。同一个估计也确定了斯特灵（Stirling）公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$ 中的常数 $\sqrt{2\pi}$。这里所用的夹逼论证，是大学一年级分析学的标准工具。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对此有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。