详细解答

STEP II 1995，第 3 题

纯数学 · 逻辑推理与计数

> **STEP II 1995，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q3

关键思路

这其实是一道乔装了的逻辑谜题，而入手的方法是计数（counting）。每个赛段都派出 $5+4+3+2+1=15$ 分，所以五位车手的得分之和是一个已知的总数。Arouet 的得分非常接近满分，几乎足以确定他所有赛段的成绩。其后，Eluard 的赛果把 Eluard 的得分从上下两面夹住，而 Camus“四次名次相同”这个条件，只剩下几种情况需要检查。

解答

我们以 A, B, C, D, E 表示各车手的总得分。已知 $A > B > C > D > E$ 及 $A = 24$。

总分与 Arouet 的各赛段成绩

每个赛段派出 15 分，所以五个赛段合共

$$A+B+C+D+E = 75, \qquad \text{因此} \qquad B+C+D+E = 51.$$

Arouet 最多可得 $5\times 5 = 25$ 分。得到 24 分即是刚好失去一分，所以 Arouet 在四个赛段得第一名，在一个赛段得第二名。Eluard 赢了第 5 赛段，所以 Arouet 的第二名必定出现在第 5 赛段，而 Arouet 赢了第 1–4 赛段。

为何 Eluard 得 11 分

下界（*lower bound*）。Eluard 在第 4 赛段得 3 分，在第 5 赛段得 5 分，而在其余三个赛段每段最少得 1 分。所以 $E \geq 3+5+3 = 11$。

上界（*upper bound*）。各人得分是互不相同的整数，且 $B > C > D > E$，所以 $D \geq E+1$、

$C \geq E+2$ 及 $B \geq E+3$。因此

$$51 = B+C+D+E \geq 4E+6, \qquad \text{所以} \qquad E \leq \tfrac{45}{4} < 12.$$

结合两个界，得 $E = 11$。下界中等号成立，亦告诉我们 Eluard 在第 1、2 及 3 赛段每段都是*最后一名*。

留给 Barthes、Camus 和 Diderot 的名次

我们现在知道 Arouet 和 Eluard 在每个赛段的名次，所以余下的名次由 Barthes、Camus 和 Diderot 三人瓜分：

赛段	Arouet、Eluard	留给 B、C、D 的名次	
1, 2, 3	第 1、第 5	第 2、第 3、第 4	（4、3、2 分）
4	第 1、第 3	第 2、第 4、第 5	（4、2、1 分）
5	第 2、第 1	第 3、第 4、第 5	（3、2、1 分）

此外 $B+C+D = 51-11 = 40$，且 $B > C > D > 11$，所以 $D \geq 12$ 及 $C \geq 13$。

? **想一想** Camus 有四次取得相同的名次。根据上表，那可以是哪些名次?

答案是第 2、第 3 或第 4 名。Camus 只能在第 4 和第 5 赛段取得第五名，那只有两个赛段，不是四个。我们逐一考虑这三种可能。

Camus 四次得第 2 名。第二名只在第 1–4 赛段可供取得，所以 Camus 在这四个赛段全部得第二名。于是 Barthes 在第 1–3 赛段每段最多得 3 分，在第 4 赛段最多得 2 分，在第 5 赛段最多得 3 分。所以 $B \leq 9+2+3 = 14$。但 $C \geq 4\times 4 = 16 > B$，出现矛盾（contradiction）。

Camus 四次得第 4 名。第四名在每个赛段都值 2 分，所以 Camus 的最佳总分是 $4\times 2+4 = 12$（余下的一个赛段得第二名）。这与 $C \geq 13$ 矛盾。

Camus 四次得第 3 名。第三名在第 1、2、3 及 5 赛段可供取得，每次值 3 分，所以这就是 Camus 的四次第三名。在第 4 赛段 Camus 得 $x \in \{4,2,1\}$ 分，而 $C = 12+x$。

- $x = 4$：$C = 16$，所以 $B \geq 17$ 及 $D = 40-B-C \leq 7$。这与 $D \geq 12$ 矛盾。
- $x = 2$：$C = 14$，所以 $B \geq 15$ 及 $D \leq 11$。同样出现矛盾。
- $x = 1$：$C = 13$，所以 $B+D = 27$，其中 $B \geq 14$ 及 $12 \leq D \leq 12$。因此 $D = 12$ 及 $B = 15$。

所以各人得分为

$$\boxed{B = 15, \quad C = 13, \quad D = 12} \qquad (\text{其中} A = 24,\ E = 11).$$

Barthes 在最后赛段的名次

> **想一想** 我们知道总分，但不知道每个赛段的赛果。现有的资料足以确定第 5 赛段的结果吗?

足够，方法是用奇偶性论证（parity argument）。Camus 在第 1、2、3 及 5 赛段得第三名，在第 4 赛段得第五名，于是 Barthes 和 Diderot 在第 1–4 赛段每段都瓜分值 4 分和 2 分的名次。在第 5 赛段，他们瓜分值 2 分和 1 分的名次（第 4 及第 5 名）。假设 Diderot 在第 1–4 赛段中有 k 段取得值 4 分的名次，并在第 5 赛段得 $s \in \{1, 2\}$ 分。那么

$$D = 4 \times 2 + 2k + s = 8 + 2k + s = 12.$$

所以 $s = 4 - 2k$ 是偶数，由此必有 $s = 2$（及 $k = 1$）。Diderot 在最后赛段得第四名，所以 **Barthes 在最后赛段得最后一名（第五名）**。

这样的赛事确实存在。例如，取第 1 赛段：A、D、C、B、E；第 2 及第 3 赛段：A、B、C、D、E；第 4 赛段：A、B、E、D、C；第 5 赛段：E、A、C、D、B。这样得出 $24, 15, 13, 12, 11$，符合要求。

验算

- 总分吻合：$24 + 15 + 13 + 12 + 11 = 75 = 5 \times 15$。
- 在上述例子的赛事中，Camus 在四个赛段得第三名，而 Eluard 在第 4 赛段得第三名，在第 5 赛段得第一名。
- 用电脑搜索全部 120^5 组可能的赛段赛果，只保留符合所有条件的，结果只找到得分 $(24, 15, 13, 12, 11)$。在每一种情况下，Barthes 在第 5 赛段都是第五名。（符合条件的赛事恰好有四个，视乎 Diderot 在第 1–4 赛段中哪一段得第二名而定。）

常见错误

- 只证明了 $E \geq 11$。题目问的是为何 Eluard 必定得 11 分，所以由 $B + C + D + E = 51$ 及得分互不相同而得出的上界是必不可少的。
- 假设 Camus 是在四个连续赛段取得相同名次，或者遗漏了第四名的情况。
- 求出了得分，却没有证明最后赛段的名次是必然的。只举出一个赛事例子并不足够；奇偶性论证说明了在每一个可能的赛事中，Barthes 在第 5 赛段都是最后一名。

STEP 之外

这个论证有三步：守恒定律（conservation law，即总分固定）、极端推理（extremal reasoning，24 分几乎是最高分），以及奇偶性论证。这三者在组合数学（combinatorics）中一再出现。从上下两面夹住一个量，直至它的值被迫确定下来，也是分析学（analysis）和数学奥林匹克解题的基本技巧。想做更多同类的谜题，可试试 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。Engel 的 *Problem-Solving Strategies* 则有整章篇幅讨论不变量原理（invariance principle）和极端原理（extremal principle）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。