详细解答

# STEP II 1995，第 2 题

纯数学 · 以递推法计算着色数目

> **STEP II 1995，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q2

本题在 *Beyond STEP* 第 9.3 节为篱笆桩着色中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/fence-posts.html

## 关键思路

把以红色开头的涂色方法，按最后一根柱子的颜色分类。直线上的每一种涂色方法都可以逐根柱子加上去而得出，而每根新柱子恰好有两种可用的颜色，所以总数很容易计算；要用递推关系（recurrence）处理的，是“以红色结尾”与“不以红色结尾”之间的划分。至于圆形，不过是一条两端颜色也必须不同的直线而已。

## 解答

### 为何 $r_{n+1} = s_n$

取 $n+1$ 根柱子的一种合规涂色方法，其中第一根和最后一根柱子都是红色。第 $n$ 根柱子与第 $n+1$ 根柱子相邻，而后者是红色，所以第 $n$ 根柱子不是红色。因此，删去第 $n+1$ 根柱子后，余下的是 $n$ 根柱子的一种合规涂色方法，其中第一根柱子是红色而最后一根不是红色：这正是 $s_n$ 种涂色方法之一。

反过来，给定 $n$ 根柱子的 $s_n$ 种涂色方法之一，由于第 $n$ 根柱子不是红色，我们可以在末端加上一根红色柱子，从而得到一种计入 $r_{n+1}$ 的涂色方法。这两个操作互为逆操作，所以它们给出一个一一对应（one-to-one correspondence），于是

$$r_{n+1} = s_n.$$

**求 $r_n + s_n$**

每一种第一根柱子为红色的合规涂色方法，最后一根柱子不是红色就是另一种颜色，所以 $r_n + s_n$ 就是第一根柱子为红色的所有合规涂色方法的总数。按次序为柱子涂色。第一根是红色（一种选择），其后每根柱子可以涂上除前一根柱子的颜色以外的任何颜色，因此不论之前怎样涂，每次都有 2 种选择。故此

$$r_n + s_n = 2^{n-1}.$$

**求 $r_{n+1} + r_n$**

代入 $s_n = r_{n+1}$，得

$$r_{n+1} + r_n = 2^{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

### 归纳法

设 $P(n)$ 为命题 $r_n = \frac{1}{3}\left(2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}\right)$。（这里用的是数学归纳法（induction）。）

基础情况（*base case*）。只有一根柱子并涂上红色时，这根柱子既是第一根也是最后一根，所以 $r_1 = 1$。公式给出 $\frac{1}{3}(1+2) = 1$，所以 $P(1)$ 成立。

归纳步骤（*inductive step*）。假设 $P(n)$ 对某个 $n \geq 1$ 成立。由上一个结果，

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= 2^{n-1} - r_n \\ &= \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1}}{3} \\ &= \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}, \end{aligned}$$

其中用到 $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 和 $-(-1)^{n-1} = (-1)^n$。这正是 $P(n+1)$。根据归纳法，$P(n)$ 对所有 $n \geq 1$ 成立。

> ? **想一想** 为甚么不由 $n = 2$ 开始归纳，或者使用两个基础情况?

递推关系 $r_{n+1} = 2^{n-1} - r_n$ 只用前一项来表示每一项，所以一个基础情况已经足够。若是涉及前两项的递推关系，就需要两个。

### 围成圆形的柱子

把柱子沿圆周编号为 $1, 2, \ldots, n$，于是第 $n$ 根柱子现在也与第 1 根柱子相邻。一种合规的圆形涂色方法，正正就是直线 $1, 2, \ldots, n$ 的一种合规涂色方法，并且额外要求第 $n$ 根柱子与第 1 根柱子颜色不同。

> ? **想一想** 如果第一根柱子不固定为红色，我们怎样数算涂色方法?

利用对称性（symmetry）。把两种颜色的名称对调，会把合规涂色方法变成合规涂色方法，所以第 1 根柱子不论选哪一种颜色，涂色方法的数目都相同。当第 1 根柱子为红色时，最后一根柱子与第一根颜色不同的直线涂色方法，正是 $s_n$ 所计算的那些。所以圆形涂色方法的数目是

$$\begin{aligned} 3s_n &= 3\left(2^{n-1} - r_n\right) \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1} \\ &= 2^n + 2(-1)^n. \end{aligned}$$

这里的柱子是可以区分的（它们竖立在固定的位置），所以两种只相差一个旋转的涂色方法会分开计算。

## 验算

- 用手计算小的情况：$r_2 = 0$（两根相邻的柱子不能同为红色）和 $r_3 = 2$（RWR、RBR），与 $\frac{1}{3}(2-2) = 0$ 和 $\frac{1}{3}(4+2) = 2$ 吻合。
- 三根柱子围成三角形时必须用齐三种颜色，共有 $3! = 6$ 种方法，而 $2^3 + 2(-1)^3 = 6$。四根柱子围成正方形则有 $16 + 2 = 18$ 种。
- 以穷举法（brute force）数算 $n \leq 12$ 的所有涂色方法，结果与上面每一条公式都一致；例如 $r_{10} = 170$、$s_{10} = 342$，而 10 根柱子的圆形涂色方法有 1026 种。

## 常见错误

- 以 $r_n$ 或 $s_n$ 作为圆形的答案，忘记了第 1 根柱子不一定是红色；因子 3 正是用来补回另外两种颜色。
- 除以 $n$ 来消去旋转。柱子的位置是固定的，所以旋转后的涂色方法是不同的涂法。

## STEP 之外

圆形的答案 $2^n + 2(-1)^n$ 是圈图（cycle graph）$C_n$ 的色多项式（chromatic polynomial）在 $k = 3$ 时的值；一般而言，使用 $k$ 种颜色时，这个多项式是 $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$，而同样的“先排成直线，再把两端接合”论证就可以证明它。色多项式以及像 $r_{n+1} + r_n = 2^{n-1}$ 这样的递推关系，都是组合数学（combinatorics）或图论（graph theory）入门课程的标准内容。想做更多同类题目，可参看 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。