详细解答

STEP II 1995，第 13 题

概率与统计 · 泊松分布的最优化

> **STEP II 1995，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q13

关键思路

尽管题库把它归入另一个类别，这其实是一道披着商业外衣的概率题：缺席乘客的人数是一个二项（binomial）计数，试验次数很多而成功概率极小，这正是泊松分布（Poisson distribution）登场的时候。之后，要对整数 k 求最优值，窍门不在微积分，而在一阶差分（first difference）$u_{k+1}-u_k$：只要多卖一张机票能令期望利润（expected profit）增加，就继续卖下去。一旦证明了这个差分是递减的，最佳的 k 就是它首次不再为正的地方。

解答

泊松模型

假设 $N+k$ 名持票人各自独立地以概率 ϵ 缺席。那么缺席人数 R 服从二项分布 $\mathrm{B}(N+k,\epsilon)$，其平均值为 $(N+k)\epsilon$。由于 k 与 N 相比非常小，这个平均值近似等于 $N\epsilon=\lambda$。试验次数很多而成功概率极小的二项分布，可以用平均值相同的泊松分布很好地近似：对固定的 r，当 $n\to\infty$ 而 $n\epsilon=\lambda$ 保持不变时，

$$\binom{n}{r}\epsilon^r(1-\epsilon)^{n-r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r}\cdot\frac{\lambda^r}{r!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-r}\ \to\ \frac{\lambda^r}{r!}\,\mathrm{e}^{-\lambda},$$

因为第一个因子趋向 1，而 $(1-\lambda/n)^n\to\mathrm{e}^{-\lambda}$。所以近似地有 $R\sim\mathrm{Po}(\lambda)$。从现在起，我们把这个分布当作精确成立，并记

$$p_r=\mathrm{P}(R=r)=\frac{\lambda^r}{r!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

利润

航空公司售出 $N+k$ 张机票，每张利润为 £A，所以无论发生甚么事，这部分都是 $A(N+k)$。若有 r 名乘客缺席，则有 $N+k-r$ 人到场，争夺 N 个座位。

- 若 $r \geq k$，到场的人最多只有 N 个，人人都可以登机：无人需要赔偿，而 $\max(0,k-r)=0$。
- 若 $r < k$，则有 $k-r$ 人无法登机，每人令公司损失 £B，而 $\max(0,k-r)=k-r$。

两种情况下，以英镑计算的利润都是 $A(N+k)-B\max(0,k-r)$。

期望利润 $u_0,\ldots,u_3$

取期望值时，只有 $r=0,1,\ldots,k-1$ 对罚款有贡献，所以

$$u_k = A(N+k) - B\sum_{r=0}^{k-1}(k-r)\,p_r.$$

代入 $p_0=\mathrm{e}^{-\lambda}$、$p_1=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}$ 和 $p_2=\frac{1}{2}\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}$：

$$\begin{aligned}
u_0 &= AN,\\
u_1 &= A(N+1) - B\mathrm{e}^{-\lambda},\\
u_2 &= A(N+2) - B\mathrm{e}^{-\lambda}(2+\lambda),\\
u_3 &= A(N+3) - B\mathrm{e}^{-\lambda}\left(3+2\lambda+\tfrac{1}{2}\lambda^2\right).
\end{aligned}$$

差分 v_k

把一般公式相减，

$$\begin{aligned}
v_k = u_{k+1}-u_k &= A - B\left[\sum_{r=0}^{k}(k+1-r)\,p_r - \sum_{r=0}^{k-1}(k-r)\,p_r\right]\\
&= A - B\left[p_k + \sum_{r=0}^{k-1}\big((k+1-r)-(k-r)\big)p_r\right]\\
&= A - B\sum_{r=0}^{k} p_r,
\end{aligned}$$

其中第一个和式里 $r=k$ 的一项 $(k+1-k)p_k = p_k$，在第二个和式中没有对应的项。用文字来说，就是 $v_k = A - B\,\mathrm{P}(R\leq k)$。这是合理的：第 $(k+1)$ 张额外机票必定赚得 £A，而它恰好在该乘客最终被拒登机时才多花 £B，这种情况在 $R\leq k$ 时发生。

想一想 为甚么方括号内的式子会化简成单纯的概率之和？

对每个 $r \le k-1$，当 k 增加一时，p_r 的系数恰好增加一（在该结果下多了一名被拒登机的乘客），而结果 $r = k$ 则开始要付一笔赔偿。所以由 0 到 k 的每个 r 都各贡献一次 p_r。

于是

$$v_k - v_{k+1} = B\,p_{k+1} = B\,\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} > 0,$$

因为 $B > 0$ 且 $\lambda > 0$。所以对每个 k 都有 $v_k > v_{k+1}$：差分严格递减。

最后，$\sum_{r=0}^{k} p_r$ 是 $\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{r\ge 0}\lambda^r/r! = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = 1$ 的部分和（partial sum），所以当 $k \to \infty$ 时它趋向 1，而

$$v_k \to A - B \qquad \text{当} k \to \infty,$$

正如题目所求。由于 $B > A$，这个极限是负数。

给 Fly By Night 的建议

记 $F(k) = \mathrm{P}(R \le k) = \sum_{r=0}^{k} p_r$，则 $v_k = A - BF(k)$，而

$$u_{k+1} > u_k \iff v_k > 0 \iff F(k) < \frac{A}{B}.$$

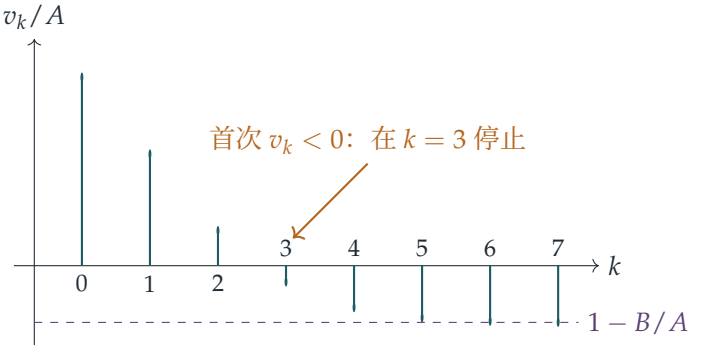
因为 v_k 严格递减而极限为负，数列 $v_0, v_1, v_2, \ldots$ 在某一点之前为正，其后为负（或有一次为零）。所以 u_k 先升后降，其最大值出现在第一个令下一张机票不再有利可图的 k：

$$\boxed{\text{选取最小的}k\text{ 使得}F(k) = \sum_{r=0}^{k}\frac{\lambda^r}{r!}\mathrm{e}^{-\lambda} \;\ge\; \frac{A}{B}.}$$

特别地，若 $\mathrm{e}^{-\lambda} \ge A/B$（乘客非常可靠，或罚款非常重），则 $v_0 \le 0$，航空公司完全不应超卖：$k = 0$。若恰好有 $F(k) = A/B$，则 $v_k = 0$，而 k 与 $k+1$ 给出相同的期望利润。由于 $A/B < 1$ 且 $F(k) \to 1$，这样的 k 必定存在。

所以建议是：只要最多有 k 人缺席的概率仍小于机票利润与赔偿额之比 A/B，就继续多卖机票；到了第一个令这个概率达到 A/B 的 k 就停止。

例如，取 $\lambda = 2$ 和 $B = 1.25A$（即 $A/B = 0.8$），可得 $F(0) \approx 0.135$、$F(1) \approx 0.406$、$F(2) \approx 0.677$ 和 $F(3) \approx 0.857$，所以最佳选择是 $k = 3$。下图显示这个情况下的 v_k/A。



验算

- 由一般公式，$u_1 - u_0 = A - B\mathrm{e}^{-\lambda} = A - Bp_0$ 及 $u_2 - u_1 = A - B\mathrm{e}^{-\lambda}(1+\lambda) = A - B(p_0 + p_1)$，与 v_0 和 v_1 吻合。
- 极限情况：若 $B \to A$，则 $A/B \to 1$，k 无止境地增大（拒载几乎没有代价）；若 $B \to \infty$，则 $A/B \to 0$，$k = 0$。
- 数值上，我们对数百组随机选取的 N, A, B, λ，直接由利润公式计算 u_k，并确认了 $u_0, \ldots, u_3$ 和 v_k 的公式、$v_k - v_{k+1} = Bp_{k+1}$，以及令 u_k 最大的 k 正是满足 $F(k) \geq A/B$ 的最小 k。当 $N = 400$、$k = 3$、$\epsilon = 0.01$ 时，有 $r = 3$ 人缺席的二项概率和泊松概率分别是 0.194 和 0.195。

常见错误

- 把 $r \geq k$ 的项也计入罚款的和式：这些项毫无贡献，因为此时每个到场的人都有座位。
- 把 u_k 对 k 求导。这个变量是整数，差分 v_k 才是合适的工具。
- 把答案写成 “$v_k = 0$”。一般而言没有任何 k 能令 v_k 恰好为零；答案是第一个令 $v_k \leq 0$ 的 k。

STEP 之外

“差分递减，所以在它变号之处停止”这个论证，是凹函数（concave function）在导数为零处取得最大值的离散版本。“当 $\mathrm{P}(R \leq k)$ 达到 A/B 时停止”这条法则，就是运筹学（operations research）中经典的报童（newsvendor，又称临界分位数 critical fractile）法则，而航空公司超卖机票正是它的一个标准应用。上文严格证明了的二项分布的泊松极限，是大学概率课程中最早遇到的极限定理（limit theorem）之一。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）既涵盖泊松近似，也讨论像 $\max(0, k - R)$ 这类函数的期望值。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。