详细解答

STEP II 1995，第 12 题

概率与统计 · 连续决斗

STEP II 1995，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s2-q12

本题在 *Beyond STEP* 第 12.13 节三人决斗中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/truel.html

关键思路

在一场持续到有人被击中为止的决斗中，每当双方都掷不中，游戏便“重新开始”。因此所求的概率（probability）满足一条以它本身表示的简单方程，根本不必求无穷级数（infinite series）之和（当然你也可以这样做）。至于三人决斗，Algernon 第一掷的每个选择都很快变成二人决斗，而第一个结果正好用来处理这些情况。出人意表的是，Algernon 的最佳一着竟是谁也不击中。

解答

二人决斗

设 P 为 Percy 先掷时他胜出的概率。考虑第一对投掷：

- Percy 第一掷便击中（概率为 p），他立即胜出；
- Percy 掷不中，然后 Rodney 击中（概率为 $(1-p)r$），Percy 落败；
- 两人都掷不中（概率为 $(1-p)(1-r)$），于是回到起点，仍由 Percy 先掷。各次投掷互相独立（independent），所以由此开始 Percy 胜出的概率仍然是 P。

因此

$$P = p + (1-p)(1-r)P \quad\Longrightarrow\quad P\big(1-(1-p)(1-r)\big) = p \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{p}{p+r-pr},$$

这是因为 $1-(1-p)(1-r)=p+r-pr$，而由于 $p>0$，此式为正数。这就是所要求的结果。

? **想一想** 游戏是否必定会结束，使得 Percy 落败确实等同于 Rodney 胜出?

是的。首 n 回合全部以双方掷不中告终的概率是 $\big((1-p)(1-r)\big)^n$，由于 $p>0$，它趋向 0。换一个做法，求等比级数（geometric series）$\sum_{k\geq 0} p\big((1-p)(1-r)\big)^k$ 之和，也会得到相同的答案。

在三人决斗中，A、B 和 C 击中的概率分别为 $\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$ 和 1。由 A 先掷的 A、B 二人决斗会出现两次，所以我们现在先用上面的结果，取 $p=\frac{2}{5}$、$r=\frac{3}{5}$ 把它算出来：

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{6}{25}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{19}{25}}=\frac{10}{19}.$$

第 (i) 部分

若 Algernon 击中 Cuthbert，便只剩下 Algernon 和 Bertie，接着轮到 Bertie 掷，目标是 Algernon。只有当 Bertie 掷不中（概率为 $\frac{2}{5}$）时，Algernon 才能留在场上。之后便是由 A 先掷的 A、B 二人决斗，Algernon 胜出的概率为 $\frac{10}{19}$。所以

$$\mathrm{P}(\text{A 胜出})=\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{19}=\frac{4}{19}.$$

第 (ii) 部分

若 Algernon 击中 Bertie, 接着轮到 Cuthbert 掷, 而他只剩 Algernon 一个目标。Cuthbert 从不失手，所以 Algernon 胜出的机会是 0。

第 (iii) 部分

若 Algernon 掷不中，三人仍然全部在场。接着轮到 Bertie 掷，他瞄准 Cuthbert。

- Bertie 有 $\frac{3}{5}$ 的概率击中 Cuthbert。这时剩下 Algernon 和 Bertie，轮到 Algernon 掷，Algernon 胜出的概率为 $\frac{10}{19}$。
- Bertie 有 $\frac{2}{5}$ 的概率掷不中。Cuthbert 随即瞄准 Bertie，并且必定击中他。这时剩下 Algernon 和 Cuthbert, 轮到 Algernon 掷。Algernon 这一掷必须击中, 否则 Cuthbert 便会击中他。所以他胜出的概率为 $\frac{2}{5}$。

因此

$$\mathrm{P}(\text{A 胜出})=\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{19}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{19}+\frac{4}{25}=\frac{150+76}{475}=\frac{226}{475}.$$

无论这次掷不中是怎样造成的，是故意还是瞄准后失手，结果都一样，因为 Bertie 和

Cuthbert 其后的打法并无分别。

Algernon 的最佳策略

> **想一想** Algernon 不能选择击中某人，只能选择瞄准某人。每个选择实际上给他带来甚么?

若他瞄准某人，他击中的概率为 $\frac{2}{5}$，掷不中的概率为 $\frac{3}{5}$，而掷不中便归入第 (iii) 部分的情况。所以:

$$\begin{aligned}
\text{瞄准 Cuthbert:}\quad & \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{19}+\frac{3}{5}\cdot\frac{226}{475}=\frac{200+678}{2375}=\frac{878}{2375}\approx 0.370,\\
\text{瞄准 Bertie:}\quad & \frac{2}{5}\cdot 0+\frac{3}{5}\cdot\frac{226}{475}=\frac{678}{2375}\approx 0.285,\\
\text{故意掷不中:}\quad & \frac{226}{475}=\frac{1130}{2375}\approx 0.476.
\end{aligned}$$

即使必定击中 Cuthbert，也只能得到 $\frac{4}{19}=\frac{100}{475}$，比 $\frac{226}{475}$ 还要小。击中任何一个对手都只会降低他的胜算。因此 Algernon 应该**第一掷故意掷不中**。这样 Bertie 和 Cuthbert 便会互相攻击，而 Algernon 可以对幸存的一方先掷。采用这个策略，他胜出的概率为 $\frac{226}{475}$，正如题目所求。

验算

- 若 $r=0$，决斗公式给出 1；若 $p=1$，它也给出 1，两者都合乎预期。
- 三个选择的排序为 $0.476>0.370>0.285$。以蒙地卡罗模拟 (Monte Carlo simulation) 模拟整场三人决斗（每种策略 3×10^5 局），得出 0.476、0.369 和 0.284，与精确值吻合。
- 以第 (iii) 部分作合理性检查：$\frac{6}{19}\approx 0.316$ 与 $\frac{4}{25}=0.16$ 相加得 0.476。

常见错误

- 弄错第一掷之后的投掷次序。在第 (i) 部分，接着掷的是 Bertie，所以要待 Bertie 掷不中之后，决斗公式才适用。
- 把“瞄准 Cuthbert”当作“击中 Cuthbert”。第 (i)–(iii) 部分都是以结果为条件的，制订策略时必须分别以 $\frac{2}{5}$ 和 $\frac{3}{5}$ 为它们加权。

STEP 之外

把一个概率写成走了一步之后以它本身表示的式子，这种方法称为首步分析（first-step analysis）。它是研究马可夫链（Markov chain）的基本工具，可把到达概率（hitting probability）和期望到达时间（expected hitting time）表示为线性方程组的解。“三人决斗”（truel）是博弈论（game theory）中一道著名的难题，当中最弱的参与者往往置身事外才最有利。想进一步了解，可参阅 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门），或 Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率论导引）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。