详细解答

# STEP II 1995，第 11 题

力学 · 线性空气阻力

**STEP II 1995，第 11 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

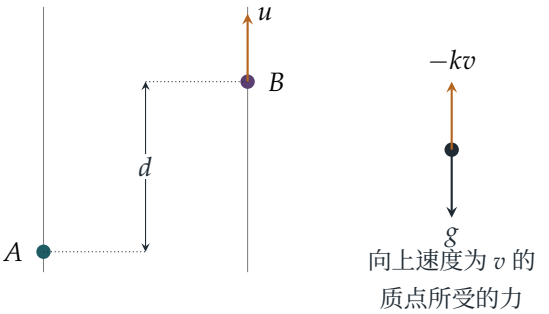
step.maths.org/questions/95-s2-q11

## 关键思路

由于阻力与速度成线性关系，运动方程（equation of motion）是线性的，而且无论质点正在上升还是下降，同一条方程都成立。因此把两条运动方程相减：重力项互相抵消，相对速度（relative velocity）纯粹按指数衰减。把它积分一次便直接得到两者的距离，完全不必知道任何一个质点身在何处。

## 解答

把每个物体视为在铅垂线上运动的单位质量质点（particle），受到重量 $g$ 以及大小为 $k|v|$、方向与运动相反的阻力（resistance）作用。取向上为正方向，以 $A$ 为原点，并设质点 1（由 $A$ 出发）和质点 2（由 $B$ 出发）在时间 $t$ 的高度为 $x_1$、$x_2$，速度为 $v_1$、$v_2$。



### 运动方程

对于向上速度为 $v$ 的质点，阻力为 $-kv$：若 $v>0$（上升），阻力向下；若 $v<0$（下降），阻力向上，两种情况都正好是“与运动方向相反”。因此，对单位质量应用牛顿第二定律（Newton's second law），每个质点都有

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = -g - kv_1, \qquad \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = -g - kv_2,$$

对所有 $t \geq 0$ 均成立。

> **想一想** 质点 2 先上升，停下来，然后下降。难道不需要为每个阶段各写一条方程吗?

假如阻力与*速率的平方*成正比，那就需要：这时的力是 $-kv|v|$，当 $v$ 变号时，它的形式会随之改变。但这里的力是 $-kv$，这单一的表达式在 $v$ 反向时已自动反向，所以一条方程便涵盖整个运动。

### 相对运动

设 $w = v_2 - v_1$ 为质点 2 相对于质点 1 的速度。把两条方程相减，重量项互相抵消：

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -kw, \qquad w(0) = u - 0 = u,$$

所以 $w = u\,\mathrm{e}^{-kt}$。现在设 $s = x_2 - x_1$，由于 $B$ 在 $A$ 上方高度 $d$ 处，故 $s(0) = d$。于是 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = w$，而

$$s = d + \int_0^t u\,\mathrm{e}^{-k\tau}\,\mathrm{d}\tau = d + \frac{u}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

由于 $u \geq 0$ 及 $1 - \mathrm{e}^{-kt} \geq 0$，我们有 $s \geq d > 0$：质点 2 永远在质点 1 之上，两个质点永不相遇。因此它们在时间 $t$ 的距离是

$$\boxed{d + \frac{u}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)}$$

当 $t \to \infty$ 时，因为 $k > 0$，所以 $\mathrm{e}^{-kt} \to 0$，距离趋向 $d + \dfrac{u}{k}$，正如题目所求。

### 个别质点的运动（如果你宁愿走远路）

分别解每条方程（它是一阶线性方程（first-order linear），也是可分离变量（separable）的方程），得 $v = -\frac{g}{k} + \left(v(0) + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt}$，再积分一次，

$$x_1 = -\frac{gt}{k} + \frac{g}{k^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right),$$

$$x_2 = d - \frac{gt}{k} + \frac{1}{k}\left(u + \frac{g}{k}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

两式相减，$gt/k$ 和 $g/k^2$ 的项互相抵消，得回同一个 $s$。两个质点的速度都趋近终端速度（terminal velocity）$-g/k$，这就是它们的距离最终稳定下来的原因。

## 验算

- 在 $t = 0$ 时距离为 $d$；而当 $t$ 很小时，距离约为 $d + ut$，与没有阻力时的情况一样（那时两个质点在重力下以相同方式下坠）。
- 若 $u = 0$，两个质点同时由静止释放，运动完全相同，一直相距 $d$，与公式吻合。
- 单位：$k$ 的单位是 $\mathrm{s}^{-1}$（每单位质量、每单位速度的力），所以 $u/k$ 是长度。
- 数值上，以龙格－库塔法（Runge–Kutta method）对随机选取的 $k$、$u$、$d$、$t$ 逐步求解两条运动方程，结果与公式吻合至约 $10^{-12}$。取 $k = 0.5$、$u = 10$、$d = 3$，距离在 $t = 1$ 时为 10.87，在 $t = 20$ 时为 22.999，趋近 $d + u/k = 23$。

## 常见错误

- 把质点 2 的运动分成“上升”和“下降”两个阶段，并为阻力配上不同的正负号：这里并无必要，而且经常引致正负号出错。
- 当 $v$ 已经是（负值的）向上速度时，仍把下降质点的阻力写成 $+kv$，这样便把正负号重复计算了。

## STEP 之外

把方程相减这一招之所以奏效，是因为运动方程是线性的：两个解之差满足齐次方程（homogeneous equation）$\dot{w} = -kw$。这就是叠加原理（superposition principle），它贯穿整套线性微分方程（linear differential equations）理论，其中每个解都是“特解加余函数”（particular solution plus complementary function）。若阻力与速率的平方成正比（quadratic drag），这个原理便不再成立，两者的距离会有截然不同的表现。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教材）阐述线性理论；Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）则讨论两种阻力下的运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。