详细解答

STEP II 1995，第 10 题

力学 · 碰撞与恢复系数

STEP II 1995，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s2-q10

关键思路

每一次碰撞都是一个由两条方程组成的问题：动量守恒（conservation of momentum）和牛顿实验定律（Newton's experimental law）。依次处理两次碰撞，令第二个球的最终速度等于 u，然后解出 m_1；不等式则来自一个简单的事实：质量必须是正数。至于最后一部分，留意碰撞只取决于相对速度，所以只要在一个以速率 v 运动的参考系（frame）中观察这个运动，问题便化为第一部分。

解答

我们把各球视为质点（particle），在光滑桌面上沿同一直线运动，因此水平方向的力就只有球与球之间的冲量（impulse）。取第一个球的运动方向为正方向。



第一次碰撞

设第一次碰撞刚结束时，第一个球和第二个球的速度分别为 v_1 和 w。由动量守恒和牛顿定律（分离速率等于接近速率的 e 倍）可得

$$m_1 v_1 + m_2 w = m_1 u, \qquad w - v_1 = eu.$$

把 $v_1 = w - eu$ 代入第一条方程，得 $(m_1 + m_2)w = m_1(1+e)u$，所以

$$w = \frac{m_1(1+e)u}{m_1 + m_2}, \qquad v_1 = \frac{(m_1 - em_2)u}{m_1 + m_2}.$$

第二次碰撞

现在第二个球以速度 w 撞向静止的第三个球。这与刚才的情况完全相同，只是 m_1, m_2, u 换成了 m_2, m_3, w，所以第二个球碰撞后的速度是

$$\frac{(m_2 - em_3)w}{m_2 + m_3}.$$

题目告诉我们这个速度等于 u。代入 w 的表达式，并约去 $u \neq 0$，得

$$\frac{(m_2 - em_3)\, m_1(1+e)}{(m_2+m_3)(m_1+m_2)} = 1, \qquad \text{所以} \qquad m_1(1+e)(m_2 - em_3) = (m_1+m_2)(m_2+m_3).$$

把含 m_1 的项合并，

$$m_1[(1+e)m_2 - e(1+e)m_3 - m_2 - m_3] = m_2(m_2+m_3),$$

而方括号内的式子可化简为 $em_2 - m_3(1+e+e^2)$。因此

$$\boxed{m_1 = \frac{m_2(m_2+m_3)}{em_2 - m_3(1+e+e^2)}}.$$

想一想 我们手上只有一条等式，不等式从何而来?

答案来自物理：质量是正数。分子 $m_2(m_2+m_3)$ 是正数，而我们用来相除的那个方括号不可能是零（否则前一条等式就会变成 $0 = m_2(m_2+m_3)$）。所以 $m_1 > 0$ 迫使分母为正数：

$$em_2 - m_3(1+e+e^2) > 0, \qquad \text{即} \qquad m_2 e > m_3(1+e+e^2),$$

这正是所要证明的结果。

由于最后一部分要数算碰撞的次数，值得确认一下之后再没有其他事情发生。第二次碰撞后，第二个球以速度 u 运动，而第一个球的速度是 $v_1 = u - \frac{m_2(1+e)u}{m_1+m_2} < u$，所以第一个球永远不会再追上第二个球。第三个球则以相对速率 $ew > 0$ 远离第二个球。因此碰撞恰好发生两次。

最后一部分

现在三个球都有共同的速度 v，只有第一个球例外，它以 $u > v$ 的速度运动。我们在一个沿该直线以恒定速度 v 运动的参考系中观察这个运动。在这个参考系中：

- 第一个球以 $u - v > 0$ 的速度朝第二个球运动，而第二个球和第三个球都是静止的；
- 每次碰撞中动量仍然守恒，因为把每个速度都减去 v，动量方程两边的改变量相同，都是 $(m_a + m_b)v$；

- 牛顿定律保持不变，因为它只涉及速度之差。

所以在这个运动的参考系中，情况与第一部分完全一样，只是 u 换成了 $u-v$，而各质量仍满足同一关系式（该关系式根本不含 u）。根据第一部分，两次碰撞之后，第二个球相对于这个参考系的速度是 $u-v$。回到桌面的参考系，我们把 v 加回去：第二个球在两次碰撞之后的速度是

$$\boxed{u}.$$

条件 $u>v$ 保证了第一次碰撞确实会发生；至于 $v>0$ 这个假设，论证中其实用不着。

验算

取 $e=\frac{1}{2}$、$m_3=1$ 和 $m_2=4$；则 $em_2=2>\frac{7}{4}=m_3(1+e+e^2)$，而公式给出 $m_1=\frac{4\cdot5}{1/4}=80$。取 $u=7$，第一次碰撞后第二个球的速度是 $w=\frac{80\cdot\frac{3}{2}\cdot7}{84}=10$，第二次碰撞后它的速度则是 $\frac{(4-\frac{1}{2})\cdot10}{5}=7=u$，与预期相符。我们亦用电脑以分数作精确运算，对超过 10^4 组随机选取、符合条件的质量和 e 值模拟了碰撞过程，每一次都确认碰撞恰好发生两次、第二个球最终的速度是 u，而且把共同速度 $v<u$ 加到第二个球和第三个球上之后，最终速度同样是 u。

常见错误

- 把牛顿定律的方向写反，例如写成 $v_1-w=eu$；在前面的球，最终的速度必定不小于后面的球。
- 在最后一部分从头再计算各次碰撞，而没有利用转换参考系的方法，题目其实已明确提示可以这样做。
- 忘记在最后把 v 加回去，以 $u-v$ 作为答案。

STEP 之外

最后一部分是伽利略不变性（Galilean invariance）的一个例子：在每一个以恒定速度运动的参考系中，碰撞定律的形式都相同，所以你可以选择令问题最容易处理的参考系。在大学的力学课程中，最常用的选择是质心参考系（centre-of-mass frame），在这个参考系中总动量为零，而一次碰撞只不过是把各速度反向，再乘以 e。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）在处理碰撞时大量运用了这个想法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。