详细解答

STEP II 1995，第 1 题

纯数学 · 等比级数的求导

> **STEP II 1995，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q1

关键思路

有限等比级数（geometric series）有闭合形式（closed form），而两个 x 的函数之间的恒等式（identity）可以求导，从而得出新的恒等式。对 $\sum x^k$ 求导会带出一个因子 k，这正好把等比级数变成 $\sum kx^{k-1}$；再代入 $x=-1$，便得到正负相间的符号。至于平方的情况，最简洁的做法是让答案的形式告诉我们 A 和 B 必须是甚么，然后用归纳法（induction）证明。

解答

第 (i) 部分

设 $S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$。则

$$S(1-x) = (1 + x + \cdots + x^n) - (x + x^2 + \cdots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1},$$

因为 $x, x^2, \ldots, x^n$ 每一个幂都以正号和负号各出现一次，互相抵消。若 $x \neq 1$，则 $1 - x \neq 0$，所以可以除以它：

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

这正是所求。

第 (ii) 部分

(i) 的两边都是在 $x \neq 1$ 上可导（differentiable）的 x 的函数，而且在该处相等，所以它们的导数也相等。左边是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + x + \cdots + x^n) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

右边则用商法则（quotient rule），得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)=\frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

现在取 $x=-1$，这是容许的，因为 $-1\neq 1$。左边变成 $1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n$，因为 kx^{k-1} 这一项变成 $(-1)^{k-1}k$。右边变成

$$\frac{1-(n+1)(-1)^n+n(-1)^{n+1}}{4}=\frac{1-(-1)^n(2n+1)}{4},$$

当中用到 $(-1)^{n+1}=-(-1)^n$。

- 若 n 是偶数，则 $(-1)^n=1$，其值为 $\dfrac{1-2n-1}{4}=-\dfrac{n}{2}$。
- 若 n 是奇数，则 $(-1)^n=-1$，其值为 $\dfrac{1+2n+1}{4}=\dfrac{n+1}{2}$。

这就是我们要证明的结果。

第 (iii) 部分

设 $T_n=1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2$，并假设 $T_n=(-1)^{n-1}f(n)$，其中 $f(n)=An^2+Bn$。

> **想一想** 在未知道公式是否成立之前，我们怎样才能求出 A 和 B?

利用我们对 T_n 唯一确知的事实：相邻两个和之差就是最后一项，即 $T_n-T_{n-1}=(-1)^{n-1}n^2$。由于 $T_{n-1}=(-1)^{n-2}f(n-1)=-(-1)^{n-1}f(n-1)$，上式可写成

$$(-1)^{n-1}\big(f(n)+f(n-1)\big)=(-1)^{n-1}n^2,\qquad\text{所以}\qquad f(n)+f(n-1)=n^2.$$

代入 $f(n)=An^2+Bn$，得

$$\begin{aligned}f(n)+f(n-1)&=An^2+Bn+A(n-1)^2+B(n-1)\\&=2An^2+(2B-2A)n+(A-B).\end{aligned}$$

要使这个式子对每一个 n 都等于 n^2，我们需要 $2A=1$ 和 $B=A$，即

$$A=B=\tfrac{1}{2},\qquad T_n=(-1)^{n-1}\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

（这些值是唯一可能的：$n=1$ 给出 $A+B=1$，而 $n=2$ 给出 $-(4A+2B)=-3$，其唯一解是 $A=B=\frac{1}{2}$。）

用归纳法证明。当 $n=1$ 时，$T_1=1=(-1)^0\cdot\frac{1\cdot 2}{2}$。假设对某个 $n\geq 2$ 有 $T_{n-1}=$

$(-1)^{n-2}\frac{(n-1)n}{2}$。则

$$T_n = T_{n-1} + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\left(n^2 - \frac{n(n-1)}{2}\right)$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2},$$

这正是 n 时的公式。因此公式对所有 $n \geq 1$ 都成立，其中 $A = B = \frac{1}{2}$。

另一做法是把各项配对：$(2m-1)^2 - (2m)^2 = -(4m-1)$。当 $n = 2m$ 时，由此得 $T_n = -\sum_{j=1}^{m}(4j-1) = -m(2m+1) = -\frac{n(n+1)}{2}$；当 $n = 2m+1$ 时，再加上 $(2m+1)^2$，便得 $(2m+1)(m+1) = \frac{n(n+1)}{2}$。（也可以把 (ii) 的恒等式乘以 x 后再求导一次，但代数运算会繁复得多。）

验算

当 $n = 4$ 时：$1-2+3-4 = -2 = -\frac{4}{2}$，以及 $1-4+9-16 = -10 = -\frac{4\cdot5}{2}$。当 $n = 5$ 时：$1-2+3-4+5 = 3 = \frac{6}{2}$，以及 $-10+25 = 15 = \frac{5\cdot6}{2}$。用电脑对 n 直至 500 验算全部三个恒等式（例如 $T_{10} = -55$ 和 $T_{11} = 66$），结果完全吻合。

还可留意 $|T_n| = 1+2+\cdots+n$：平方的交错和（alternating sum），其大小竟与首 n 个正整数的普通和相同。这个巧合令人意外，而配对的论证正好解释了它。

常见错误

- 忘记了 $x = -1$ 之所以是合法的取值，全因 (i) 的恒等式对所有 $x \neq 1$ 成立；在 $x = 1$ 时，右边没有定义。
- 处理 $(-1)^{n+1}$ 时弄错符号：它等于 $-(-1)^n$，而不是 $(-1)^n$。
- 由 $n = 1$ 和 $n = 2$ 求出 A 和 B 后便停下来。这只说明了这些是唯一可能的值；要靠归纳法（或配对）才能说明公式确实对每一个 n 都成立。

STEP 之外

对 $\sum x^k$ 逐项求导,是一个威力强大的想法的有限版本:幂级数(power series)在其收敛半径(radius of convergence)之内可以逐项求导，由此得出当 $|x| < 1$ 时 $\sum kx^{k-1} = (1-x)^{-2}$。在 $x = -1$ 时，无穷级数 $1-2+3-4+\cdots$ 发散（diverges），但公式却暗示其值为 $\frac{1}{4}$；事实上，(ii) 的公式可以写成 $\frac{1}{4} - (-1)^n\frac{2n+1}{4}$，所以部分和（partial sums）以 $\frac{1}{4}$ 为中心对称地摆动。为这类发散级数赋予一个值，正是阿贝尔求和法（Abel summation）背后的想法。Abbott 的 *Understanding Analysis*（实分析入门教材）对幂级数的逐项求导有严

谨的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。