详细解答

STEP I 1995，第 9 题

力学 · 抛体轨道的包络线

> **STEP I 1995，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q9

关键思路

固定一点 (x, y)，然后问：是否存在某个抛射角（angle of projection），使轨迹（trajectory）经过这一点？把轨迹方程用 $\tan\theta$ 而不是 θ 来表示，它就是一个关于 $\tan\theta$ 的二次方程（quadratic）。一点可以到达，当且仅当这个二次方程有实根（real root），所以整个问题归结为判别式（discriminant）。

解答

模型

我们把粒子视为只受重力作用的质点（point mass）：没有空气阻力（air resistance），g 的大小和方向均不变，路径上亦没有任何障碍。这样，粒子便在包含其初速度的铅垂平面内运动；又因为只有与 O 的水平距离才有关系，由对称性可取 $x \geq 0$，并设粒子朝 x 增加的方向抛出，与水平线所成的仰角为 θ，其中 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$。（垂直向上抛出，即 $\theta = \frac{\pi}{2}$，留待最后处理。）

轨迹

设 $u = \sqrt{2gh}$，故 $u^2 = 2gh$。加速度恒为向下的 g，经过时间 t 后

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

利用 $t = x/(u\cos\theta)$ 消去时间，并运用 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$，得

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \tan^2\theta\right) = x\tan\theta - \frac{x^2}{4h}\left(1 + \tan^2\theta\right),$$

因为 $2u^2 = 4gh$。设 $T = \tan\theta$，并把全式乘以 $4h$，则轨迹经过 (x, y) 当且仅当

$$x^2T^2 - 4hx\,T + (x^2 + 4hy) = 0. \qquad (*)$$

当 θ 取遍 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$T = \tan\theta$ 恰好取每个实数值一次，所以选择一个角度等同于选择一个实数 T。

> **想一想** 为甚么要用 $\tan\theta$ 而不用 θ 来表示轨迹?

若以 θ 表示，方程中混杂了 sin、cos 和 $\sec^2$，处理起来很不方便。利用 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$，一切都变成单一变量 T 的多项式，而“是否存在这样的角度?”就变成“这个二次方程有没有实根?”，这个问题我们可以立即回答。

哪些点可以到达

取 $x > 0$。此时 $(*)$ 是一个真正关于 T 的二次方程，它有实根当且仅当其判别式非负：

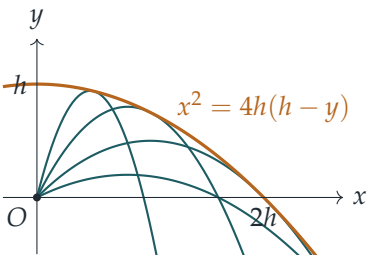
$$\begin{aligned}(4hx)^2 - 4x^2(x^2 + 4hy) \geq 0 &\iff 4x^2(4h^2 - x^2 - 4hy) \geq 0\\ &\iff x^2 \leq 4h^2 - 4hy = 4h(h - y),\end{aligned}$$

其中我们除以了 $4x^2 > 0$。因此，若 (x, y) 位于抛物线*上方*，即 $x^2 > 4h(h - y)$，或等价地 $y > h - \dfrac{x^2}{4h}$，则 $(*)$ 没有实根，没有任何抛射角能使粒子经过 (x, y)。

余下要处理的是 $x = 0$，即通过 O 的铅垂线。这条线上 $y \neq 0$ 的点，只有垂直抛射才能到达（任何其他角度都会令 $x > 0$ 对所有 $t > 0$ 成立）。以速率 u 垂直向上抛出时，粒子上升至高度 $u^2/(2g) = h$ 便不再上升，而这正是抛物线与 $x = 0$ 相交的一点。所以在这条线上，抛物线上方的点同样无法到达。

因此，无论抛射角是多少，粒子永远不能到达抛物线 $x^2 = 4h(h - y)$ 上方的任何一点。■

这个界限是最佳的：当 $x^2 = 4h(h - y)$ 时，判别式为零，恰好有一个角度 $\tan\theta = 2h/x$，其路径刚好与抛物线相切。这条抛物线是所有轨迹的*包络线*（envelope），常称为安全抛物线（parabola of safety）。



四条速率为 $\sqrt{2gh}$ 的轨迹（青绿色），每条都与边界抛物线（琥珀色）相切一次。

简化假设

- 粒子是一个质点（没有大小，没有自转）。
- 忽略空气阻力（以及重力以外的任何其他力）。
- 重力场是均匀的：g 在整个运动范围内为常数，这亦意味着把地球表面视为平面，并忽略地球的自转。
- 路径不受阻挡（例如不被地面阻挡），所以粒子确实能够到达所讨论的点。

验算

- 在 $x = 0$ 处，抛物线给出 $y = h = u^2/(2g)$，即垂直上抛的最大高度。在 $y = 0$ 上，它给出 $x = 2h = u^2/g$，即大家熟悉的水平地面上的最大射程（maximum range）（在 45° 时取得，此时 $\tan\theta = 2h/x = 1$，与预测相符）。
- 数值上，取 $g = 9.8$ 和 $h = 1.7$，我们对 399 个抛射角（由几乎垂直向下到几乎垂直向上）逐步模拟运动；在所有路径上，高出抛物线的最大高度约为 -5×10^{-13}，即在舍入误差范围内为零；而在固定 x 之下对角度求 y 的最大值，每次都得回 $h - x^2/(4h)$。

常见错误

- 只考虑 θ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 范围内的情况。位于 O 下方的点需要向下抛射（$T < 0$），论证必须涵盖这些情况。
- 除以 x（或 x^2）时，没有另外处理 $x = 0$ 的情况。
- 只证明了某一条特定轨迹位于抛物线之下；命题所说的是每一个角度，这正是我们固定一点而让角度变化的原因。

STEP 之外

这里的抛物线是单参数轨迹族的*包络线*：即与族中每一条曲线都相切的曲线。对于曲线族 $F(x, y, T) = 0$，包络线可由 $F = 0$ 与 $\partial F/\partial T = 0$ 消去 T 而求得；对于关于 T 的二次方程，这恰恰就是判别式等于零。包络线还会在光学的焦散线（caustics）、一阶微分方程理论（奇解，singular solutions），以及给定速率的所有抛射体的“安全区域”中再度出现。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）是进一步学习有空气阻力和无空气阻力的抛体运动的好选择。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。