详细解答

STEP I 1995，第 8 题

纯数学 · 线性微分方程

STEP I 1995，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s1-q8

关键思路

未知的是三个函数(function),但在每个固定的 x 处,它们只不过是三个数 $\mathrm{f}(x)$、$\mathrm{g}(x)$、$\mathrm{h}(x)$。把题目给出的三个解代入 $(*)$，便得到关于这三个数的三条线性方程（linear equation），我们把它们当作联立方程（simultaneous equations）来解。至于第二段，$(*)$ 的左边对 y 而言是线性的，所以 x、1 和 x^{-1} 的组合所得的结果，可由每一项各自产生的结果推出。

解答

求 f、g 和 h

把左边 $y'' + \mathrm{f}(x)y' + \mathrm{g}(x)y$ 记作 Ly，于是 $(*)$ 就是 $Ly = \mathrm{h}(x)$。我们把各个解逐一代入。

- $y = 1$：这时 $y' = y'' = 0$，所以 $\mathrm{g}(x) = \mathrm{h}(x)$。
- $y = x$：这时 $y' = 1$，$y'' = 0$，所以 $\mathrm{f}(x) + x\,\mathrm{g}(x) = \mathrm{h}(x)$。
- $y = x^{-1}$：这时 $y' = -x^{-2}$，$y'' = 2x^{-3}$，所以

$$\frac{2}{x^3} - \frac{\mathrm{f}(x)}{x^2} + \frac{\mathrm{g}(x)}{x} = \mathrm{h}(x).$$

在第二条方程中使用 $\mathrm{h} = \mathrm{g}$，得 $\mathrm{f}(x) = (1-x)\,\mathrm{g}(x)$。把这两个结果代入第三条方程，并在两边同乘 x^3（因为 $x > 0$，这样做是容许的）：

$$\begin{aligned} 2 - x(1-x)\,\mathrm{g}(x) + x^2\,\mathrm{g}(x) &= x^3\,\mathrm{g}(x) \\ 2 = \mathrm{g}(x)\left(x^3 - 2x^2 + x\right) &= \mathrm{g}(x)\,x(1-x)^2. \end{aligned}$$

由于 $0 < x < 1$，因子 $x(1-x)^2$ 不等于零，所以可以用它来除。因此

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{h}(x) = \frac{2}{x(1-x)^2}, \qquad \mathrm{f}(x) = (1-x)\,\mathrm{g}(x) = \frac{2}{x(1-x)}.$$

在每个 x 处，我们都是一步一步解出这三条方程，过程中没有任何自由选择的余地，所以符合条件的函数就只有这一组。限制 $0 < x < 1$ 使我们避开 $x = 0$ 和 $x = 1$，这些函数在该两处会趋向无穷大。

所以这条方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x(1-x)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x(1-x)^2}y = \frac{2}{x(1-x)^2}.$$

$ax + b + c/x$ 何时是解?

算子（operator）L 是线性的：对常数 α, β，有 $L(\alpha u + \beta v) = \alpha\,Lu + \beta\,Lv$，因为求导（differentiation）是线性的，而 f、g 只是分别乘以 y' 和 y。由第一段可知

$$L(x) = L(1) = L(x^{-1}) = \mathrm{h}(x).$$

因此，对于 $y = ax + b + c/x$，

$$Ly = a\,L(x) + b\,L(1) + c\,L(x^{-1}) = (a+b+c)\,\mathrm{h}(x).$$

> ? **想一想** 为甚么我们可以断定 $a+b+c=1$，而不仅仅是“在某个 x 处 $a+b+c=1$”?

我们需要 $(a+b+c)\,\mathrm{h}(x) = \mathrm{h}(x)$ 对所有 $0 < x < 1$ 成立，即 $(a+b+c-1)\,\mathrm{h}(x) = 0$。但在这个区间上 $\mathrm{h}(x) = 2/\big(x(1-x)^2\big) > 0$，所以可以用它来除。因此 $y = ax + b + c/x$ 是 $(*)$ 的解，当且仅当（if and only if）

$$a + b + c = 1.$$

验算

- 取 $(a,b,c) = (1,0,0)$、$(0,1,0)$ 或 $(0,0,1)$，便得回题目给出的三个解，而每一个都满足 $a+b+c=1$。
- 直接验证：取 $x = \frac{1}{2}$，得 $\mathrm{f} = 8$，$\mathrm{g} = \mathrm{h} = 16$。对于 $y = 1/x$，有 $y = 2$，$y' = -4$，$y'' = 16$，而 $16 - 32 + 32 = 16$，符合要求。
- 电脑在 $(0,1)$ 内的 49 个有理数点上精确地检验了全部三个解，并对 2000 组随机的 (a,b,c,x) 确认了 $Ly = (a+b+c)\mathrm{h}$。

常见错误

- 对 $y = x^{-1}$ 写成 $y'' = -2x^{-3}$：两个负号相乘，结果应是 $+2x^{-3}$。
- 答成 $a + b + c = 0$。那是 $ax + b + c/x$ 满足齐次（homogeneous）方程 $Ly = 0$ 的条件；这里右边是 h，不是 0。

STEP 之外

这正是线性微分方程（linear differential equation）的解的结构：$Ly = \mathrm{h}$ 的任意两个解之差都是 $Ly = 0$ 的解。这里 $x - 1$ 和 $x^{-1} - 1$ 是齐次方程的解，而对于二阶方程，两个线性无关（independent）的解便可给出全部的解。所以 $1 + \alpha(x - 1) + \beta(x^{-1} - 1)$ 就是通解（general solution），而这恰好就是满足 $a + b + c = 1$ 的那一族解。朗斯基行列式（Wronskian）可以把“线性无关”的意思说得精确。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）涵盖了以上所有内容。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。