详细解答

STEP I 1995，第 7 题

纯数学 · 三角形的向量几何

STEP I 1995，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s1-q7

关键思路

把原点设在与 A、B、C 等距的一点，位置向量（position vector）$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 的长度便全部相同。整道题就靠这一个事实，因为对于长度相等的向量，$(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$。一旦发现 Q 的位置向量是简洁漂亮的 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$，两部分都只需一两行代数运算。

解答

选取原点

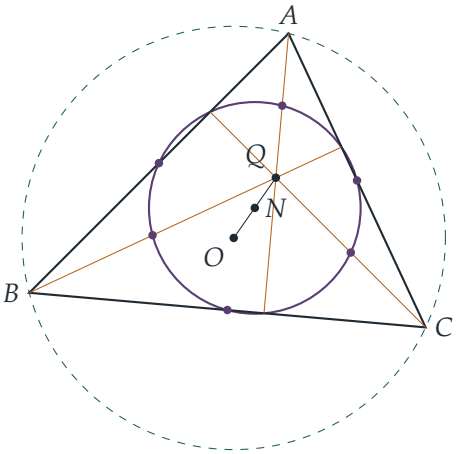
与 A 和 B 等距的点构成 AB 的垂直平分线（perpendicular bisector），这是一条垂直于 AB 的直线；B 和 C 的情况亦然。由于 A、B、C 不共线（collinear），AB 与 BC 不平行，所以它们的垂直平分线也不平行。因此这两条直线恰好相交于一点，该点与 A 和 B 等距，也与 B 和 C 等距，故与三点皆等距。（这一点就是三角形的外心（circumcentre）。）

取这一点为 O，以 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 表示 A、B、C 的位置向量，并设 R 为这个共同的距离，于是

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R.$$

形心（centroid）的位置向量为 $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$。由于 $\overrightarrow{GQ} = 2\overrightarrow{OG}$ 即 $\mathbf{q}-\mathbf{g} = 2\mathbf{g}$，

$$\mathbf{q} = 3\mathbf{g} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}, \qquad \mathbf{n} = \tfrac{1}{2}\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$



图中所示为以 O 为圆心、通过 A、B、C 的圆（虚线），相交于 Q 的三条高（altitude），以及以 N 为圆心、半径为 $\frac{1}{2}R$、通过第 (ii) 部分六个中点的圆。

第 (i) 部分

我们有 $\overrightarrow{AQ} = \mathbf{q} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 及 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$，所以

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BC} = (\mathbf{c} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = R^2 - R^2 = 0,$$

其中用了 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ 来消去交叉项。因此 $\overrightarrow{AQ}$ 垂直于 $\overrightarrow{BC}$。

? **想一想** $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 真的保证 Q 在由 A 作出的高上吗？如果 $\overrightarrow{AQ}$ 是零向量（zero vector）又如何？

若 $Q \neq A$，直线 AQ 通过 A 且垂直于 BC，所以它正是由 A 作出的高，而 Q 在其上。若 $Q = A$（这恰好在 $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ 时发生，即 BC 为直径而 A 处的角为直角），则 Q 显然在由 A 作出的高上。无论哪种情况，Q 都在由 A 作出的高上。

以上论证并没有对 A 另眼相看：表达式 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 是对称的，所以同理可得

$$\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CA} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 0,$$
$$\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{AB} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 = 0,$$

故 Q 也在由 B 和由 C 作出的高上。所以三条高都通过同一点 Q：它们共点（concurrent）。（Q 就是垂心（orthocentre）。）

第 (ii) 部分

AQ 的中点的位置向量为 $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{q}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$，所以它相对于 N 的位移为

$$\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}.$$

BC 的中点的位置向量为 $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$，所以它相对于 N 的位移为

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})-\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=-\tfrac{1}{2}\mathbf{a}.$$

两者的长度都是 $\frac{1}{2}|\mathbf{a}|=\frac{1}{2}R$。

根据同样的对称性，BQ 和 CA 的中点相对于 N 的位移为 $\pm\frac{1}{2}\mathbf{b}$，而 CQ 和 AB 的中点则为 $\pm\frac{1}{2}\mathbf{c}$。由于 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=R$，六个中点与 N 的距离全部是 $\frac{1}{2}R$，这正是我们要证明的。事实上我们还多证了一点：AQ 的中点和 BC 的中点位于这个圆某条直径的两端，其余两对中点亦然。

验算

- 等边三角形：此时 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$，所以 O、G、Q 和 N 全部重合，而六个中点与中心的距离应该都是 $\frac{1}{2}R$。事实上，各边中点与中心的距离为 $R\cos 60^\circ=\frac{1}{2}R$，而 AQ 等的中点则位于半径的正中。
- A 处为直角：此时 $Q=A$，与上面论证所预测的一致，因为两条直角边本身就是通过 A 的高。
- 数值上，我们随机取了 10^5 个三角形，直接计算外心，并确认了 $Q=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$、三个点积（dot product）全部为零，以及六个中点与 N 的距离全部是 $\frac{1}{2}R$，最大相对误差约为 10^{-13}。

常见错误

- 把 $\overrightarrow{GQ}=2\overrightarrow{OG}$ 读成 $\mathbf{q}=2\mathbf{g}$。它说的是 $\mathbf{q}-\mathbf{g}=2\mathbf{g}$，所以 $\mathbf{q}=3\mathbf{g}$。
- 只证明了一个垂直关系便停笔。要证明共点，Q 必须在全部三条高上；应明确写出同样的计算对 B 和 C 也成立。
- 忘记说明原点为何可以这样选：这一点之所以存在，是因为两条不平行的边的垂直平分线必定相交。

STEP 之外

由于 $\mathbf{q}=3\mathbf{g}$ 及 $\mathbf{n}=\frac{3}{2}\mathbf{g}$，$O$、$G$、$N$、$Q$ 四点全在同一条直线上，这条直线称为欧拉线（*Euler line*），且 $OG:GQ=1:2$。第 (ii) 部分的圆就是九点圆（*nine-point circle*）：它还通过三条高的垂足（图中可见），因为每个垂足对某条直径（例如由 AQ 的中点至 BC 的中点的那一条）所张的角都是直角。巧妙地选取原点，让一个对称的表达式代劳，是向量几何和线性代数（linear algebra）中反复出现的技巧；Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*

（线性代数入门教材）进一步发展了向量和点积的工具，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 进阶题集）则有更多同类风格的 STEP 式几何题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。