详细解答

STEP I 1995，第 6 题

纯数学 · 伯努利微分方程

> **STEP I 1995，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q6

关键思路

两条方程对 y 而言都不是线性的，但各自对 $1/y$ 的某个适当幂次却是线性的。左边含有 y'/y^2，它（除正负号外）正是 $1/y$ 的导数（derivative）；因此设 $u = 1/y$，方程便化为关于 u 的一阶线性方程（first-order linear equation），再用积分因子（integrating factor）即可解决。在第 (ii) 部分，y'/y^3 一项提示我们应改为考虑 $1/y^2$。

解答

第 (i) 部分

设 $u = 1/y$。由链式法则（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

所以方程的第一项恰好是 $-\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$，而第二项是 u。方程变成

$$-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \mathrm{e}^{2x}, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u = -\mathrm{e}^{2x}.$$

这对 u 而言是线性的。积分因子是 $\mathrm{e}^{\int -1\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x}$，全式乘以它便得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u\,\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \mathrm{e}^{-x}u = -\mathrm{e}^{x}.$$

两边积分，其中 A 为任意常数（arbitrary constant），

$$u\,\mathrm{e}^{-x} = A - \mathrm{e}^{x}, \qquad \text{所以} \qquad u = A\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}.$$

由于 $y = 1/u$，

$$y = \frac{1}{A\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}},$$

这就是所求的通解（general solution）。（原方程含有 $1/y$，所以自始至终 $y \neq 0$，代换不会遗漏任何解；此公式在任何满足 $Ae^x \neq e^{2x}$ 的区间上都成立，即当 $A > 0$ 时须避开 $x = \ln A$。）

第 (ii) 部分

> **想一想** 这里哪一个代换能担当 $u = 1/y$ 的角色?

我们希望新变量的导数能产生 y'/y^3。由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{2}{y^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

正确的选择是 $v = 1/y^2$。于是第一项是 $-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，第二项是 v，所以

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = e^{2x}, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 2v = -2e^{2x}.$$

这次积分因子是 e^{-2x}：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v\,e^{-2x}) = -2e^{2x}\cdot e^{-2x} = -2.$$

两边积分，其中 B 为任意常数，

$$v\,e^{-2x} = B - 2x, \qquad \text{所以} \qquad \frac{1}{y^2} = (B - 2x)\,e^{2x}.$$

因此

$$y^2 = \frac{e^{-2x}}{B - 2x}, \qquad y = \pm\frac{e^{-x}}{\sqrt{B - 2x}}.$$

因为 $1/y^2 > 0$，我们需要 $B - 2x > 0$：解只在 $x < \frac{1}{2}B$ 时存在，而正负号则由 y 最初的符号决定（它不可能变号，因为 y 永不为零）。与第 (i) 部分不同，答案并非两个指数函数（exponential）之差：这里右边的 e^{2x} 恰好与积分因子 e^{-2x} 互相抵消，剩下一个常数待积分，这就是线性项 $-2x$ 出现的原因。

验算

- 代回 (ii)：由 $1/y^2 = (B - 2x)e^{2x}$，求导得 $-2y'/y^3 = -2e^{2x} + 2(B - 2x)e^{2x}$，所以 $y'/y^3 = e^{2x} - 1/y^2$，这正是原方程。
- 数值检验：在 (ii) 中取 $y(0) = 1$ 得 $B = 1$，于是公式预测 $y(0.4) = e^{-0.4}/\sqrt{0.2} \approx 1.49888$。由 $x = 0$ 开始以数值方法逐步求解该微分方程（differential equation），所得的值与此相同，准确至小数点后十位。两个通解在许多随机选取的点和常数下，亦都满足各自的方程。

常见错误

- 在 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 中漏掉负号（或第 (ii) 部分的因子 2），令整条线性方程出错。
- 在第 (ii) 部分只写正平方根，或没有留意到解须满足 $x < \frac{1}{2}B$。

STEP 之外

两条方程都是伯努利方程（Bernoulli equation）$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ 的例子：除以 y^n 并代入 $u = y^{1-n}$，总能得到一条线性方程。这里第 (i) 部分是 $n = 2$，第 (ii) 部分是 $n = 3$。解可以在有限的 x 处“爆破”（blow up）（例如 $x \to \frac{1}{2}B$ 时），这是非线性方程（nonlinear equation）的典型特征，在常微分方程（ODE）的入门课程中会学到；参见 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。