详细解答

STEP I 1995，第 5 题

纯数学 · 二项式级数与积分

STEP I 1995，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s1-q5

关键思路

对多项式逐项求导（differentiating term by term），可以消去麻烦的 $1/r$ 因子，剩下的几乎就是一个二项展开式（binomial expansion）：系数 $(-1)^{r+1}\binom{n}{r}$ 正好是 $-(1-x)^n$ 去掉常数项后的系数。一旦求得 f'，微积分基本定理（fundamental theorem of calculus）（连同 $\mathrm{f}(0)=0$）便把 f 表示成一个积分，再用代换（substitution）$y=1-t$ 就可化成所要求的形式。那里的被积函数（integrand）是一个等比级数（geometric series），可以立即积分。

解答

导数

记

$$\mathrm{f}(x)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}\frac{x^r}{r}.$$

这是一个多项式，所以可以逐项求导：

$$\mathrm{f}'(x)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}x^{r-1}.$$

当 $x \neq 0$ 时，乘以 x 并利用 $(-1)^{r+1}x^r = -(-x)^r$：

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{f}'(x) &= -\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r}(-x)^r \\ &= -\Big(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}(-x)^r - 1\Big) \\ &= 1-(1-x)^n, \end{aligned}$$

这里用了二项式定理（binomial theorem）。除以 x，得

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1-(1-x)^n}{x} \qquad (x \neq 0),$$

正是所求。（在 $x = 0$ 处，由级数得 $\mathrm{f}'(0) = n$，这也是右边当 $x \to 0$ 时的极限，因为 $1-(1-x)^n = nx + O(x^2)$。）

积分公式

f 的每一项都含有因子 x，所以 $\mathrm{f}(0) = 0$。由微积分基本定理，

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(0) + \int_0^x \mathrm{f}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-(1-t)^n}{t}\,\mathrm{d}t.$$

> ? **想一想** 公式的分母含有 t，积分时穿过 $t = 0$ 是否稳妥?

稳妥。被积函数其实就是多项式 $\mathrm{f}'(t)$；那个分数只是它在 $t \neq 0$ 时的一种简洁写法，而它在 $t = 0$ 处的值就是极限 n。所以这里并没有奇点（singularity），只是公式中有一个可去的缺口。

现在作代换 $y = 1 - t$，于是 $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y$；当 $t = 0$ 时 $y = 1$，当 $t = x$ 时 $y = 1 - x$。于是

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= \int_1^{1-x} \frac{1-y^n}{1-y}\,(-\mathrm{d}y) \\ &= \int_{1-x}^{1} \frac{1-y^n}{1-y}\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

其中把积分上下限对调，以抵消负号。这就是所要求的结果，而且对任何实数 x 都成立。

$\mathrm{f}(1)$ 的值

取 $x = 1$，则积分下限为 0。当 $y \neq 1$ 时，被积函数是一个等比级数之和，

$$\frac{1-y^n}{1-y} = 1 + y + y^2 + \cdots + y^{n-1},$$

而（一如前述）它在 $y=1$ 处的值是极限 n，所以在整个 $[0,1]$ 上，被积函数就是这个多项式。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(1) &= \int_0^1 (1+y+\cdots+y^{n-1})\,\mathrm{d}y \\ &= \left[y+\frac{y^2}{2}+\cdots+\frac{y^n}{n}\right]_0^1 \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\end{aligned}$$

正是所求。

留意这个结果的含义：在原来的级数中代入 $x=1$，便得到一个令人惊讶的恒等式

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r+1}}{r}\binom{n}{r}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

若要直接看出，绝不容易。

验算

- $n=1$：$\mathrm{f}(x)=x$，而 $\big(1-(1-x)\big)/x=1=\mathrm{f}'(x)$；同时 $\mathrm{f}(1)=1$。
- $n=4$：$\mathrm{f}(1)=4-\frac{6}{2}+\frac{4}{3}-\frac{1}{4}=\frac{25}{12}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$。
- 我们在 300 个随机有理点上精确地验证了导数公式，又对随机的 $x\in[-1.5,1.5]$ 和 $n\le 15$ 把积分（用辛普森法则（Simpson's rule）计算）与级数比较（相对误差小于 10^{-11}），并对每个 $n\le 40$ 精确地确认了关于 $\mathrm{f}(1)$ 的恒等式。

常见错误

- 与 $(1-x)^n$ 的二项展开式对照时，忘记了 $r=0$ 那一项：由 $r=1$ 开始的和是 $(1-x)^n-1$，而不是 $(1-x)^n$。
- 写出 $\mathrm{f}(x)=\int_0^x \mathrm{f}'(t)\,\mathrm{d}t$ 而没有指出 $\mathrm{f}(0)=0$。
- 作代换 $y=1-t$ 之后把积分上下限的次序弄反：正是 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}y$ 的负号把上下限调回来。

STEP 之外

$H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 这些数称为调和数（harmonic numbers）；它们的增长速度与 $\ln n$ 相若，而 $H_n-\ln n$ 趋向欧拉常数（Euler's constant）$\gamma\approx 0.5772$。这里所用的技巧，即先求导以消去麻烦的分母，然后再积分回去，正是推导 $\ln(1+x)$ 和 $\tan^{-1}x$ 的幂级数（power

series）时所用的方法；而它对无穷级数是否成立的论证（幂级数的逐项求导），是大学一年级分析学（analysis）的核心课题。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对此有严谨的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。