详细解答

STEP I 1995，第 4 题

纯数学 · 棣美弗定理

STEP I 1995，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s1-q4

关键思路

棣美弗定理（de Moivre's theorem）把 $\sin 5\theta$ 化为 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^5$ 的虚部（imaginary part），而二项式定理（binomial theorem）则把这个幂展开成 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 的乘积。虚部的每一项都含有 $\sin\theta$ 的奇数次幂，所以我们可以抽出一个因子，再利用 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ 把余下的部分化为余弦。接着，角 $\frac{1}{5}\pi$ 之所以特别，是因为在该处 $\sin 5\theta = 0$，于是剩下一条关于 $\cos^2\theta$ 的二次方程（quadratic equation）。

解答

恒等式

设 $c = \cos\theta$ 及 $s = \sin\theta$。由棣美弗定理，

$$\cos 5\theta + \mathrm{i}\sin 5\theta = (c + \mathrm{i}s)^5.$$

由二项式定理，系数为 $1, 5, 10, 10, 5, 1$，

$$(c + \mathrm{i}s)^5 = c^5 + 5c^4(\mathrm{i}s) + 10c^3(\mathrm{i}s)^2 + 10c^2(\mathrm{i}s)^3 + 5c(\mathrm{i}s)^4 + (\mathrm{i}s)^5.$$

由于 $\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$、$\mathrm{i}^4 = 1$ 及 $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$，虚数项就是含 $\mathrm{i}s$ 奇数次幂的各项：

$$\mathrm{Im}(c + \mathrm{i}s)^5 = 5c^4 s - 10c^2 s^3 + s^5.$$

c 和 s 都是实数，所以比较虚部可得

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= s\left(5c^4 - 10c^2s^2 + s^4\right)\\ &= s\left(5c^4 - 10c^2(1-c^2) + (1-c^2)^2\right)\\ &= s\left(5c^4 - 10c^2 + 10c^4 + 1 - 2c^2 + c^4\right)\\ &= s\left(16c^4 - 12c^2 + 1\right),\end{aligned}$$

其中第二行用了 $s^2 = 1 - c^2$。也就是说，

$$\sin 5\theta = \sin\theta\left(16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1\right),$$

这正是所要证明的恒等式（identity）。

求 $\cos^2\frac{1}{5}\pi$ 的值

取 $\theta = \frac{1}{5}\pi$。这时 $\sin 5\theta = \sin\pi = 0$，而 $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$（因为 $0 < \frac{1}{5}\pi < \pi$）。所以我们可以把恒等式两边除以 $\sin\theta$，于是 $x = \cos^2\frac{1}{5}\pi$ 满足

$$16x^2 - 12x + 1 = 0, \qquad \text{所以} \qquad x = \frac{12 \pm \sqrt{144-64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

想一想 这条二次方程有两个根。哪一个才是 $\cos^2\frac{1}{5}\pi$?

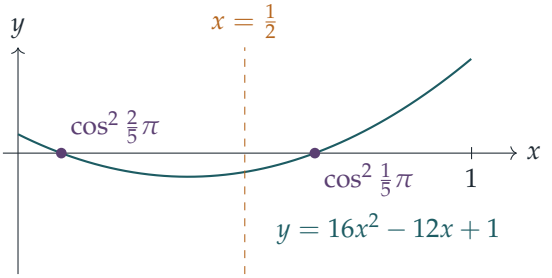
要选出正确的根，我们还需要多一项关于 $\cos\frac{1}{5}\pi$ 的事实。由于 $0 < \frac{1}{5}\pi < \frac{1}{4}\pi$，而 cos 在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上递减，我们有 $\cos\frac{1}{5}\pi > \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$，所以

$$\cos^2\tfrac{1}{5}\pi > \tfrac{1}{2}.$$

现在由 $\sqrt{5} < 3$ 得 $\frac{3-\sqrt{5}}{8} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$，而由 $\sqrt{5} > 1$ 得 $\frac{3+\sqrt{5}}{8} > \frac{1}{2}$。恰好只有一个根大于 $\frac{1}{2}$，所以

$$\cos^2\tfrac{1}{5}\pi = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

（另一个根并非多余的假根：当 $\theta = \frac{2}{5}\pi$ 时同样有 $\sin 5\theta = 0$ 及 $\sin\theta \neq 0$，而 $\cos^2\frac{2}{5}\pi = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$。）



推导 $\cos\frac{1}{5}\pi$

由于 $0<\frac{1}{5}\pi<\frac{1}{2}\pi$，$\cos\frac{1}{5}\pi>0$，所以我们取正平方根：

$$\cos\tfrac{1}{5}\pi=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}.$$

最后，$(1+\sqrt{5})^2=1+2\sqrt{5}+5=6+2\sqrt{5}$ 而且 $1+\sqrt{5}>0$，所以 $\sqrt{6+2\sqrt{5}}=1+\sqrt{5}$，于是

$$\cos\tfrac{1}{5}\pi=\tfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right),$$

这正是所要求的结果。

验算

- 当 $\theta=\frac{1}{2}\pi$ 时，恒等式给出 $\sin\frac{5}{2}\pi=1\cdot(0-0+1)=1$，结果正确。当 θ 很小时：两边都约等于 5θ，因为括号内的式子趋向 $16-12+1=5$。
- 以数值计算，$\cos 36^\circ\approx 0.809017$ 而 $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\approx 0.809017$；另外 $\cos^2 36^\circ\approx 0.654508=\frac{3+\sqrt{5}}{8}$。我们亦在 10^4 个随机角度上检验过这个恒等式。
- $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ 是黄金比（golden ratio）φ 的一半，而黄金比正是正五边形的对角线与边长之比，这与 36° 这个角所暗示的一致。

常见错误

- 忘记 i 的幂所带来的正负号：s^3 项带有 $\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$，因而得到 $-10c^2s^3$。
- 毫无理由地选定二次方程的其中一个根。你需要一个不等式（inequality），例如 $\cos^2\frac{1}{5}\pi>\frac{1}{2}$，才能排除 $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$。
- 除以 $\sin\theta$ 时没有指出 $\sin\frac{1}{5}\pi\neq 0$。

STEP 之外

用同样的方法，可以把 $\sin n\theta/\sin\theta$ 和 $\cos n\theta$ 写成 $\cos\theta$ 的多项式，即切比雪夫多项式（Chebyshev polynomials），它们在数值分析（numerical analysis）中随处可见。$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/5}$ 这些数是五次单位根（fifth roots of unity），而 $\cos\frac{1}{5}\pi$ 只涉及平方根这一事实，正是正五边形可以用尺规作图（ruler-and-compasses construction）的原因；高斯（Gauss）关于哪些正多边形可以尺规作图的定理，是大学本科伽罗瓦理论（Galois theory）的一大亮点。至于棣美弗定理背后的几何，可参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。