详细解答

STEP I 1995，第 3 题

纯数学 · 裂项相消级数

> **STEP I 1995，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q3

关键思路

当一个和式中相邻各项有大部分内容相同时，把每一项写成差 $\mathrm{f}(r)-\mathrm{f}(r-1)$ 的形式，几乎所有东西都会互相抵消：这个和式会裂项相消（telescope）。功夫在于选取 f，使这个差恰好是你想要的那一项；本题已替我们选好了。至于交错级数（alternating series），窍门是把它写成全部立方之和减去偶数立方之和的两倍，于是第 (ii) 部分的结果可以用上两次。

解答

第 (i) 部分

把和式完整写出：

$$\sum_{r=1}^{n}\{\mathrm{f}(r)-\mathrm{f}(r-1)\}=\{\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(0)\}+\{\mathrm{f}(2)-\mathrm{f}(1)\}+\cdots+\{\mathrm{f}(n)-\mathrm{f}(n-1)\}.$$

$\mathrm{f}(1),\mathrm{f}(2),\ldots,\mathrm{f}(n-1)$ 每一个都带正号出现一次、带负号出现一次，所以全部抵消。余下的只有第一个括号中的 $-\mathrm{f}(0)$ 和最后一个括号中的 $\mathrm{f}(n)$，得出 $\mathrm{f}(n)-\mathrm{f}(0)$，正是所求。

如果你想要比“全部抵消”更严谨的说法，可以对 n 使用归纳法（induction）。当 $n=1$ 时，和为 $\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(0)$。若结果对 $n=k$ 成立，则加上下一项后得

$$\mathrm{f}(k)-\mathrm{f}(0)+\mathrm{f}(k+1)-\mathrm{f}(k)=\mathrm{f}(k+1)-\mathrm{f}(0),$$

这就是 $n=k+1$ 时的结果。因此结果对所有 $n\geq 1$ 成立。

第 (ii) 部分

取 $\mathrm{f}(r) = r^2(r+1)^2$，则 $\mathrm{f}(r-1) = (r-1)^2r^2$。两者都含有因子 r^2，所以把它抽出，再运用平方差（difference of two squares）：

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(r) - \mathrm{f}(r-1) &= r^2[(r+1)^2 - (r-1)^2] \\ &= r^2[(r+1)+(r-1)][(r+1)-(r-1)] \\ &= r^2 \cdot 2r \cdot 2 = 4r^3.\end{aligned}$$

现在由 $r = 1$ 加至 n，并应用第 (i) 部分。由于 $\mathrm{f}(0) = 0$，

$$4\sum_{r=1}^{n} r^3 = \mathrm{f}(n) - \mathrm{f}(0) = n^2(n+1)^2, \qquad \text{所以} \qquad \boxed{\sum_{r=1}^{n} r^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.}$$

第 (iii) 部分

这个级数（series）共有 $2n+1$ 项：奇数的立方带正号，偶数的立方带负号，最后一项是奇数立方 $(2n+1)^3$。

> **想一想** 只用 $\sum r^3$ 的公式，怎样处理正负交错的符号?

先考虑直到 $(2n+1)^3$ 为止的全部立方之和。当中每个偶数立方都带正号，而我们想要的是负号，所以把每个偶数立方减去两次：

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - \cdots + (2n+1)^3 = \sum_{k=1}^{2n+1} k^3 - 2\sum_{m=1}^{n} (2m)^3.$$

偶数立方为 $(2m)^3 = 8m^3$，其中 $m = 1, \ldots, n$，最大的是 $(2n)^3$。运用第 (ii) 部分两次，其中一次以 $2n+1$ 代替 n，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+1} k^3 - 16\sum_{m=1}^{n} m^3 &= \tfrac{1}{4}(2n+1)^2(2n+2)^2 - 16 \cdot \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ &= (2n+1)^2(n+1)^2 - 4n^2(n+1)^2 \\ &= (n+1)^2[(2n+1)^2 - (2n)^2] \\ &= (n+1)^2(4n+1),\end{aligned}$$

其中第二行用了 $(2n+2)^2 = 4(n+1)^2$，最后一行则用了平方差 $(2n+1)^2 - (2n)^2 = (2n+1+2n)\cdot 1$。因此

$$\boxed{1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(4n+1).}$$

验算

- 当 $n = 0$ 时，级数只有 $1^3 = 1$，而 $(0+1)^2(0+1) = 1$。
- 当 $n = 1$ 时：$1 - 8 + 27 = 20$，而 $2^2 \times 5 = 20$。
- 当 $n = 2$ 时：$1 - 8 + 27 - 64 + 125 = 81$，而 $3^2 \times 9 = 81$。
- 答案的增长应与 $(2n+1)^3/2$ 相若，即大约是最后一项的一半，因为各项可配对成 $(2m+1)^3 - (2m)^3 \approx 12m^2$。事实上 $(n+1)^2(4n+1) \approx 4n^3$，与 $\sum 12m^2 \approx 4n^3$ 吻合。

我们亦以直接求和的方法，对由 0 至 199 的每一个 n 验证了第 (ii) 和第 (iii) 部分。

常见错误

- 只把偶数立方减去一次，得出 $\sum k^3 - \sum (2m)^3$，这是奇数立方之和，而不是交错和。
- 把偶数立方取到 $(2n+2)^3$，或在全部立方之和的公式中用了 n 而不是 $2n+1$：要仔细数清楚项数。

STEP 之外

第 (i) 部分是微积分基本定理（fundamental theorem of calculus）的离散版本：差 $\mathrm{f}(r) - \mathrm{f}(r-1)$ 扮演导数（derivative）的角色，把它求和便可还原 f，正如对 F' 积分会得出 $F(b) - F(a)$ 一样。这套“有限差分演算”（calculus of finite differences）让你只要找到合适的 f，就能求出任何多项式的和；而同样的裂项相消思想，也是许多级数收敛（convergence）证明的基础。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）有更多关于裂项相消和这类级数的练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。