详细解答

STEP I 1995，第 2 题

纯数学 · 代换积分法

> **STEP I 1995，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q2

关键思路

在第 (i) 部分，两个积分（integral）单独来看都不易处理，但两者却是天作之合：相加后得到的分式可约简为 1，相减后得到的分子恰好是分母的导数（derivative）。两个容易的积分，给出关于 S 和 T 的两条联立方程（simultaneous equations）。在第 (ii) 部分，选用代换（substitution）$x = \sin^2 t$，是因为它把 $\frac{1}{x} - 1$ 化为完全平方 $\cot^2 t$，令平方根消失；其后全靠倍角公式（double-angle formulae）便可完成。

解答

第 (i) 部分

把两个被积函数（integrand）相加，

$$S + T = \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + c_1.$$

把两者相减，

$$S - T = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x.$$

分子正是分母的导数，因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x + \sin x) = -\sin x + \cos x$。所以这个积分属于 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ 的形式，而

$$S - T = \ln|\cos x + \sin x| + c_2.$$

把这两条方程相加、相减，再除以二，

$$S = \tfrac{1}{2}(x + \ln|\cos x + \sin x|) + C,$$
$$T = \tfrac{1}{2}(x - \ln|\cos x + \sin x|) + C',$$

其中 C 和 C' 为任意常数（arbitrary constants）。在任何满足 $\cos x + \sin x \neq 0$ 的区间上，被积函数均有定义，以上结果亦在该区间上成立。

第 (ii) 部分

设 I 为所求的积分。取 $x = \sin^2 t$，则 $\mathrm{d}x = 2\sin t \cos t \,\mathrm{d}t$。至于积分上下限（limits），$x = \frac{1}{4}$ 给出 $\sin t = \frac{1}{2}$，所以 $t = \frac{\pi}{6}$；而 $x = \frac{1}{2}$ 给出 $\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}$，所以 $t = \frac{\pi}{4}$。（我们取 t 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 内；当 t 走遍这个区间时，x 由 $\frac{1}{4}$ 递增至 $\frac{1}{2}$。）

接着处理平方根：

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

想一想 为甚么平方根是 $\cos t / \sin t$，而不是 $|\cos t / \sin t|$?

一般而言，$\sqrt{\cot^2 t} = |\cot t|$。但当 $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}$ 时，$\sin t$ 和 $\cos t$ 皆为正数，所以 $\cot t > 0$，绝对值（modulus）符号可以略去。这正是我们选取 t 在第一象限（first quadrant）的原因。

代入后，$\sin t$ 互相约去：

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} (1 - 4\sin^2 t)\, \frac{\cos t}{\sin t}\, 2\sin t \cos t \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/6}^{\pi/4} 2\cos^2 t\,(1 - 4\sin^2 t)\,\mathrm{d}t.$$

现在利用倍角公式，令这个积分变得容易计算。由于 $2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$ 及 $8\sin^2 t \cos^2 t = 2\sin^2 2t = 1 - \cos 4t$，

$$2\cos^2 t - 8\sin^2 t \cos^2 t = (1 + \cos 2t) - (1 - \cos 4t) = \cos 2t + \cos 4t.$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (\cos 2t + \cos 4t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{4}\sin 4t\right]_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{4}\sin\pi\right) - \left(\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{4} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}\right), \end{aligned}$$

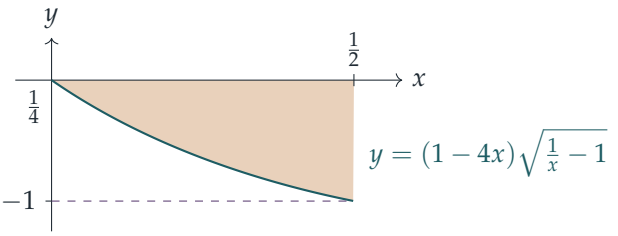
所以

$$\int_{1/4}^{1/2} (1 - 4x)\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{8}.$$

验算

- 正负号：在 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 上，$1 - 4x < 0$ 而平方根为正，所以被积函数为负，I 必为负数。果然 $4 - 3\sqrt{3} \approx -1.196$，所以 $I \approx -0.1495$。下图显示被积函数的图像。

- 把辛普森法则(Simpson's rule)直接应用于原来的积分,得出 $-0.149519\ldots$,与 $\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 吻合至小数点后十个位。
- 至于第 (i) 部分,求导验证:$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}\big(x+\ln(\cos x+\sin x)\big)=\frac{1}{2}\Big(1+\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\Big)=\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$。例如在 $[0,1]$ 上,S 和 T 的数值均与数值积分(quadrature)的结果相符(0.66168 和 0.33832)。



常见错误

- 忘记把上下限改为 $t=\frac{\pi}{6}$ 和 $t=\frac{\pi}{4}$,或在代回 x 时出错。
- 漏掉 $\mathrm{d}x$ 中的因子 $2\sin t\cos t$,或写成 $\mathrm{d}x=2\sin t\,\mathrm{d}t$。
- 得出正数答案:被积函数在整个区间上都是负数,所以答案若为正值,即表示正负号出了错。

STEP 之外

第 (i) 部分的技巧,是替一个棘手的积分找一个"拍档",使两者之和与差都容易计算。这个技巧一再出现,例如用于 $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$,而它的复数形式则是对 $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ 积分。第 (ii) 部分是一个普遍原则的小例子:选得恰当的代换,可以把代数形式的被积函数化为三角多项式(trigonometric polynomial),而这正是傅里叶级数(Fourier series)的起点。想看更多这类风格的积分,并附有细致的讨论,可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*(《高等数学难题》)。

Beyond STEP 详细解答:https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0;题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有(©),本文件不予转载。由机器从英文翻译而成;尚未经审阅。