详细解答

STEP I 1995，第 12 题

概率与统计 · 排列与计数

STEP I 1995，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s1-q12

关键思路

n 名学生的每一种排列（arrangement）出现的机会均等，所以每个概率（probability）都等于有利排列的数目除以 $n!$。更好的做法是利用对称性（symmetry）：我们只需关心曲棍球员占据了哪些位置，而 $\binom{n}{r}$ 个由 r 个位置组成的集合，每一个出现的机会都相同。于是每一部分都变成一个关于选取位置的计数问题。至于最后一部分，题目中关于空隙的提示正是标准的“隔板法”（stars and bars）技巧：先把非曲棍球员排成一列，曲棍球员就必须分别放进他们之间不同的空隙。

解答

以下一律把 r 名曲棍球员记作 H，其余 $n-r$ 名学生记作 N。把学生视为可区分的，则全部 $n!$ 种排序出现的机会均等。由于 H 所占的每一个 r 个位置的集合，都对应相同数目的排序，即 $r!\,(n-r)!$ 种，所以 H 所占位置的集合，等可能地是 $\binom{n}{r}$ 个可能集合中的任何一个。以下哪一种观点较方便，我们就用哪一种。

第 (i) 部分

先填两端的位置。左端的学生是曲棍球员的概率为 $\frac{r}{n}$。在此条件下，右端的学生是余下 $n-1$ 名学生的其中一人，各人机会均等，而当中有 $r-1$ 人打曲棍球。所以

$$\mathrm{P}(\text{两端都是曲棍球员}) = \frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1} = \frac{r(r-1)}{n(n-1)}.$$

（要这个概率不为零，需要 $r \geq 2$，而题目已保证这一点。）

第 (ii) 部分

曲棍球员全部站在一起，当且仅当他们的位置构成连续 r 个位置的一段。这样的一段可以由第 $1, 2, \ldots, n-r+1$ 个位置开始，所以在 $\binom{n}{r}$ 个位置集合之中，有 $n-r+1$ 个是有利的：

$$\mathrm{P}(\text{全部站在一起}) = \frac{n-r+1}{\binom{n}{r}} = \frac{r!\,(n-r+1)!}{n!}.$$

另一个等价的做法，是把 r 名曲棍球员黏合成一个“超级学生”：$n-r+1$ 个单位共有 $(n-r+1)!$ 种排序，而该段内部有 $r!$ 种排序，得出相同的答案。作为验算，当 $r=n$ 时这个概率为 1，正如所料。

第 (iii) 部分

先让 $n-r$ 名非曲棍球员排成一列。他们造成 $n-r+1$ 个空隙：第一人之前有一个，每对相邻的人之间各有一个，最后一人之后有一个。



没有两名曲棍球员相邻，当且仅当每个空隙最多放入一名曲棍球员。（若两个 H 在同一个空隙，他们便会相邻；若他们在不同的空隙，则至少有一个 N 把他们隔开。）因此，有利的排列对应于从 $n-r+1$ 个空隙中选出 r 个，每个选中的空隙放一个 H。

以位置来计数：一个有利的 H 位置集合，完全取决于用了哪 r 个空隙，所以共有 $\binom{n-r+1}{r}$ 个。因此

$$\mathrm{P}(\text{没有两人相邻}) = \frac{\binom{n-r+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n-r+1)!\,(n-r)!}{(n-2r+1)!\,n!}.$$

（直接数学生的排序也得出同样的结果：N 的排序有 $(n-r)!$ 种，然后把 r 个互不相同的 H 放进不同的空隙，有 $(n-r+1)(n-r)\cdots(n-2r+2) = \frac{(n-r+1)!}{(n-2r+1)!}$ 种方法，再全部除以 $n!$。）

> ? **想一想** 在甚么情况下，不可能把所有曲棍球员都分隔开？

我们需要 r 个不同的空隙，而空隙只有 $n-r+1$ 个。所以：

- 若 $r \le n-r+1$，即 $n \ge 2r-1$，概率就是上面那个非零的值；
- 若 $r > n-r+1$，即 $n \le 2r-2$（非曲棍球员太少，不足以把他们隔开），概率为 0。

在临界情况 $n = 2r-1$，排列必然是 $HNHN\cdots NH$ 的模式，而公式给出 $\frac{r!\,(r-1)!}{(2r-1)!} = 1\big/\binom{2r-1}{r}$，即 H 恰好落在那 r 个相间位置的机会。

验算

- 取 $n = 10, r = 3$。则 (i) 给出 $\frac{6}{90} = \frac{1}{15}$；(ii) 给出 $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$；(iii) 给出 $\binom{8}{3}/\binom{10}{3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$。三者都与电脑枚举 120 个可能位置集合所得的结果吻合，而且各公式已用这个方法对所有 $2 \le r \le n \le 14$ 验证过（当 $n \le 7$ 时，更与全部 $n!$ 种排序对照过）。
- 当 $r = 2$ 时，第 (ii) 和第 (iii) 部分是互补事件（complementary events）（两名球员要么相邻，要么不相邻），而的确有 $\frac{2}{n} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} + \frac{n-2}{n} = 1$。

常见错误

- 只数出 $n - r - 1$ 个空隙（即严格位于非曲棍球员之间的那些），而忘记了队列的两端。
- 混用模型：分子数的是 H 的位置，分母却用学生的全部排序（$n!$）。选定一种观点，然后贯彻到底。
- 把答案非零的条件写成 $n \ge 2r$；其实 $n = 2r - 1$ 的情况（交替排列，首尾都是 H）同样可行。

STEP 之外

空隙论证就是“隔板法”的想法，是计数组合学（enumerative combinatorics）中的常用工具；同一个数目 $\binom{n-r+1}{r}$ 也回答了“$\{1, \ldots, n\}$ 有多少个 r 元子集不含两个连续整数”这个问题，而把它对 r 求和就得到斐波那契数（Fibonacci numbers）。把人的排序换成位置的集合这一步，让人初尝利用对称性来缩小样本空间（sample space）的滋味，这种手法在大学概率论中经常用到。Blitzstein 与 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率论入门）中，关于计数和概率的朴素定义（naive definition of probability）的章节写得十分出色。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。