详细解答

STEP I 1995，第 11 题

力学 · 圆柱之间的摩擦力

STEP I 1995，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s1-q11

关键思路

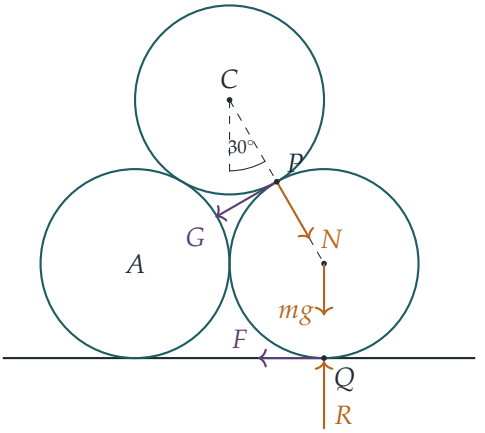
先看底下其中一个圆柱。它的重量和来自顶部圆柱的法向反作用力（normal reaction）都通过它的中心，所以对中心取力矩（moments）时只涉及两个摩擦力（friction），而这两个摩擦力的大小必定相等。接着只要沿水平方向分解（resolve）一次，就能定出圆柱之间接触点上摩擦力与法向反作用力之比，余下的工作就交给三个互相接触的圆的几何（30° 和 60° 的角）来完成。

解答

模型

我们把这些圆柱视为半径为 r 的均匀刚体（rigid body）圆柱，并在垂直于各轴的横截面上考虑问题，因此每个圆柱都是一个圆，其重量作用于圆心。每个接触点的摩擦系数（coefficient of friction）同为 μ。把底下的两个圆柱称为 A（左）和 B（右），顶部的一个称为 C。A 和 B 的中心相距 $2r$，高度同为 r；C 的中心与两者各相距 $2r$，所以三个中心所成的三角形是等边三角形，而由 C 的中心至 B 的中心的直线与铅垂线成 30° 角。

我们暂且假设 A 和 B 之间互不施力；这一点留待最后再作讨论。根据对称性（symmetry），只需考虑 B 以及 C 右边的接触点。



作用于 B 的力有：

- 作用于其中心的重量 mg；
- 在与地面的接触点 Q：向上的法向反作用力 R，以及沿水平方向指向 A 的摩擦力 F；
- 在与 C 的接触点 P：沿连心线的法向反作用力 N（向下向外，与铅垂线成 30° 角），以及沿公切线（common tangent）的摩擦力 G，我们设它的方向为向下并指向 A，即在水平线以下 30°。

假如其中一个摩擦力实际上是朝相反方向作用，算出来的值自然会是负数。

对 B 的中心取力矩

重量通过 B 的中心，N 亦然，因为两圆之间的法向反作用力沿它们的连心线作用。两个摩擦力都沿切线作用，与中心的垂直距离为 r。F 位于底部并指向 A，在图中使 B 顺时针转动；G 位于 P 并沿切线向下指向 A，使它逆时针转动。因此

$$Fr = Gr, \qquad \text{所以} \qquad F = G.$$

对 B 沿水平方向分解

N 有一个向外的水平分量 $N\sin 30^\circ = \frac{1}{2}N$。$F$ 以及 G 的水平分量 $G\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}G$ 都指向内。所以

$$\tfrac{1}{2}N = F + \tfrac{\sqrt{3}}{2}G = G\left(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

由此得

$$\frac{G}{N} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}.$$

这是正数，所以 G 确实沿我们所设的方向作用，$F = G$ 亦然。

要令 P 处的接触点不发生滑动，我们需要 $G \le \mu N$，即

$$\mu \ge 2 - \sqrt{3}.$$

与地面的接触点

我们还须检查与地面的接触点不会要求更大的摩擦力。对 C 而言，来自 B 的力有：N，方向为向上偏左，与铅垂线成 30° 角；以及 G，沿切线向上，与水平线成 30° 角。它们的铅垂分量分别为 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$ 和 $\frac{1}{2}G$，而根据对称性，A 的贡献亦相同。对 C 沿铅垂方向分解，

$$2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}N + \tfrac{1}{2}G\right) = mg \implies N\left(\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}\right) = mg \implies N = \tfrac{1}{2}mg.$$

对整个系统沿铅垂方向分解，系统的重量为 $3mg$，根据对称性由两边平均承担，故 $R = \frac{3}{2}mg$。于是

$$\frac{F}{R} = \frac{(2-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}mg}{\frac{3}{2}mg} = \frac{2-\sqrt{3}}{3} < 2 - \sqrt{3},$$

所以只要 $\mu \ge 2 - \sqrt{3}$，与地面的接触点同样不会滑动。圆柱之间的接触点才是关键所在。

想一想 A 和 B 互相接触。为甚么我们可以忽略它们之间的任何力？

它们只能把对方推开，所以假设 A 以大小为 $S \ge 0$ 的力沿连心线把 B 向外推。这个力通过 B 的中心，所以力矩方程仍然给出 $F = G$，但水平方向的分解变成 $\frac{1}{2}N + S = G\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$。与此同时，$C$ 的铅垂方向方程仍然成立，把两者联立求解，可知 G/N 随 S 增加而增加（当 $S = 0$ 时其值为 $2 - \sqrt{3}$）。这个问题是静不定（statically indeterminate）的，因为 S 不能由这些方程确定，而当 $S = 0$ 时所需的摩擦力最小。所以摩擦系数的最小可能值是 $2 - \sqrt{3}$，正如题目所求。

验算

- $2 - \sqrt{3} = \tan 15^\circ \approx 0.268$。所以在圆柱之间的接触点，总反作用力与法线恰好成 15° 角，正是几何中 30° 角的一半。这是个令人欣喜的迹象，显示代数运算无误。
- 地面的比值 $(2 - \sqrt{3})/3 \approx 0.089$ 是圆柱之间比值的三分之一，这很合理：地面承受 $\frac{3}{2}mg$，是 N 的三倍，但摩擦力的大小相同。
- 作数值验算，把数值代入 B 和 C 的所有力方程和力矩方程，并对未知的推力 $S \ge 0$ 求最小值，得出最小的 μ 为 0.267949…，与 $2 - \sqrt{3}$ 吻合。

常见错误

- 对地面接触点或对 P 取力矩，而不是对中心取力矩。这样做也行得通，但会引入 N，令代数运算较为繁复；对中心取力矩则可同时消去 mg 和 N。
- 只检查地面。地面接触点所需的摩擦力小得多，所以会得出错误的临界值。
- 对 C 沿铅垂方向分解时，忘记了根据牛顿第三定律（Newton's third law），作用于 C 的摩擦力是沿切线向上的。

STEP 之外

底下两个圆柱之间的力 S 无法由平衡方程求出：这个结构是静不定的，而题目很合理地要求在 S 的所有可能取值之中求最小的摩擦。在工程学上，这类系统要靠建立弹性形变的模型来解决，而同样的问题亦见于颗粒物料的力学，例如叠起的喉管或沙堆。若想细读有关静力学、摩擦和刚体平衡的严谨论述，可参阅 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。