详细解答

STEP I 1995，第 10 题

力学 · 弹性绳与反弹

STEP I 1995，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/95-s1-q10

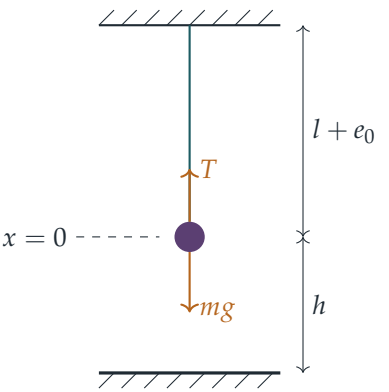
关键思路

若从平衡位置（equilibrium position）量起，重量与张力（tension）中属于平衡状态的那一部分恰好互相抵消，因此唯一未被平衡的力，就是与位移 x 成正比的胡克定律（Hooke's law）回复力（restoring force）。由此可知运动是简谐运动（simple harmonic motion），而它的能量方程正是题目所求的速率公式。其后的一切只是逐项记帐：能量方程负责把球在 $x = 0$ 与表面之间的运动联系起来，而牛顿实验定律（Newton's experimental law）则在每次反弹时把速度反向并按比例缩小。

解答

我们把球当作质点（particle），把绳当作轻而有弹性的绳，并假设它在拉长时服从胡克定律。我们忽略空气阻力，并假设反弹在瞬间完成。全题记

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{lm}.$$



平衡时的长度

设平衡时的伸长量（extension）为 e_0，则张力为 $T_0 = \lambda e_0/l$。球处于平衡时，沿铅垂方向分解力，得 $T_0 = mg$，所以

$$\frac{\lambda e_0}{l} = mg \quad \Longrightarrow \quad e_0 = \frac{mgl}{\lambda},$$

而总长度为 $l + e_0 = l(1 + mg/\lambda)$，正如题目所求。

速率公式

设 x 为球在平衡位置以下的距离，并取向下为正。当 $x \geq 0$ 时，伸长量为 $e_0 + x > 0$，所以绳是拉紧的，张力为 $\lambda(e_0 + x)/l$。沿向下方向应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda(e_0 + x)}{l} = -\frac{\lambda x}{l},$$

因为 $\lambda e_0/l = mg$。所以 $\ddot{x} = -\omega^2 x$：这是以 $x = 0$ 为中心的简谐运动。

写成 $\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 并积分，

$$\int v\,\mathrm{d}v = -\omega^2 \int x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad v^2 = -\omega^2 x^2 + C.$$

在 $x = 0$ 时速率为 u_0，所以 $C = u_0^2$，而

$$v^2 + \frac{\lambda}{lm}x^2 = u_0^2,$$

正如题目所求。（这等价于能量守恒（conservation of energy）：重力势能与弹性势能合起来就是 $\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{l}x^2$ 加一个常数。）

第一次反弹

球能到达表面，当且仅当在 $x = h$ 时 $v^2 > 0$，即 $u_0^2 - \omega^2 h^2 > 0$。这正是题目给出的条件 $\lambda h^2 < lmu_0^2$。所以球以速率 w_0 撞击表面，其中

$$w_0^2 = u_0^2 - \omega^2 h^2.$$

根据牛顿实验定律，球离开表面时向上运动，速率为 ew_0。

球由 $x = h$ 上升到 $x = 0$ 的过程中，绳仍然处于拉长状态，所以同一条运动方程依然成立，而能量积分为 $v^2 + \omega^2 x^2 =$ 常数。唯一不同的是这个常数的值。在 $x = h$ 时 $v^2 = e^2 w_0^2$，所以常数为 $e^2 w_0^2 + \omega^2 h^2$，而在 $x = 0$ 时

$$\begin{aligned} u_1^2 &= e^2 w_0^2 + \omega^2 h^2 \\ &= e^2\left(u_0^2 - \omega^2 h^2\right) + \omega^2 h^2 \\ &= e^2 u_0^2 + \frac{\lambda}{lm}h^2\left(1 - e^2\right), \end{aligned}$$

正如题目所求。这里 u_1 的方向向上。

第二次反弹

> **想一想** 球经过 $x = 0$ 之后会升到平衡位置之上，绳可能会变松。球回到 $x = 0$ 时，速率还是 u_1 吗?

是的。在 $x = 0$ 之上，球在重量和绳的张力作用下运动；若绳变松，则只受重力作用。这两个力都是保守力（conservative force）：绳松弛时，它的弹性势能就是零。因此在 $x = 0$ 之上的整段运动中，总机械能守恒。球落回 $x = 0$ 时，势能与离开时相同，所以速率同样是 u_1，只是方向变为向下。

所以第二次下降与第一次完全一样，只是以 u_1 取代 u_0。我们仍须确定球能到达表面，而它确实可以，因为

$$u_1^2 - \omega^2 h^2 = e^2 \left(u_0^2 - \omega^2 h^2 \right) > 0.$$

把 u_0 换成 u_1，重复第一次反弹的论证，

$$\begin{aligned} u_2^2 &= e^2 u_1^2 + \omega^2 h^2 \left(1 - e^2 \right) \\ &= e^2 \left[e^2 u_0^2 + \omega^2 h^2 (1 - e^2) \right] + \omega^2 h^2 (1 - e^2) \\ &= e^4 u_0^2 + \omega^2 h^2 (1 - e^2)(1 + e^2) \\ &= e^4 u_0^2 + \frac{\lambda}{lm} h^2 \left(1 - e^4 \right), \end{aligned}$$

全题至此完成。

验算

- 若 $e = 1$，则没有能量损失，两条公式都给出 $u_1 = u_2 = u_0$，与预期相符。
- 若 $e = 0$，球离开表面时处于静止，于是 $u_1^2 = \omega^2 h^2$：球由振幅（amplitude）h 处从静止开始上升，并以速率 ωh 通过中心，正如简谐运动所预测。
- 有一个简洁的方法看出规律：$u_n^2 - \omega^2 h^2 = e^{2n} \left(u_0^2 - \omega^2 h^2 \right)$，因为每次反弹都把撞击速率的平方乘以 e^2。
- 我们以数值方法逐步计算这个运动（龙格—库塔法（Runge–Kutta），并容许绳变松）。例如，取 $m = 1$、$l = 1$、$\lambda = 20$、$g = 9.8$、$u_0 = 6$、$h = 0.3$ 及 $e = 0.9$，模拟结果为 $u_1 = 5.4316$ 和 $u_2 = 4.9233$，与公式吻合。在这个例子中，绳在两次反弹之间确实会变松。

常见错误

- 从自然长度（natural length）而非平衡位置量度 x。这样重量就不会抵消，公式中会多出一次项。
- 把恢复系数（coefficient of restitution）e 用于 $x = 0$ 处的速率，而不是用于 $x = h$ 处的撞击速率。
- 假设绳在平衡位置之上仍然保持拉紧。其实不一定，但由于能量守恒，这一点并不影响球在 $x = 0$ 处的速率。

STEP 之外

重力在平衡点附近抵消，是一个普遍原理的最初例子：在平衡点附近作线性化（linearise），则小幅振动是简谐运动，其 ω^2 等于“劲度”除以质量。弹跳的球是分段光滑振子（piecewise-smooth oscillator），又称碰撞振子（impact oscillator）的一个例子。当表面本身也在运动时，这类系统的行为可以异常丰富（倍周期（period doubling），甚至混沌（chaos））。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）以大学一年级的程度讲解振子和能量方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。