详细解答

STEP I 1995，第 1 题

纯数学 · 多项式不等式

> **STEP I 1995，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q1

关键思路

第 (i) 部分的三次式（cubic）可用分组法因式分解（factorise）；一旦写成三个线性因式（linear factor）的乘积，它的正负号便可从数线上直接读出。第 (ii) 部分其实是同一个三次式的化身：每一项的总次数（degree）都是 3，所以除以 y^3 之后，它就变成以 x/y 为变量的第 (i) 部分的三次式。同样的因式分解于是给出三条通过原点的直线，而第 (iii) 部分就是一个正负号表，只不过这次是围绕原点而画，而不是沿着一条直线而画。

解答

第 (i) 部分

把各项两两分组，

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - x + 4 &= x^2(x-4) - (x-4) \\ &= (x-4)(x^2-1) \\ &= (x+1)(x-1)(x-4). \end{aligned}$$

根（root）是 -1、1 和 4。每个因式都是线性的，只会在自己的根处变号，所以乘积在三个根处都会变号。当 x 是很大的正数时，三个因式全是正数，因此从右边读起，正负号的分布是

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 4$	$x > 4$
正负号	$-$	$+$	$-$	$+$

把三次式等于零的各个根也包括在内，不等式（inequality）成立的充要条件是

$$-1 \le x \le 1 \quad \text{或} \quad x \ge 4.$$

第 (ii) 部分

设 $f(x,y) = x^3 - 4x^2y - xy^2 + 4y^3$。它就是第 (i) 部分的三次式，只是每一项都用 y 的幂补足至 3 次，而同样的分组法仍然适用：

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2(x-4y) - y^2(x-4y) \\ &= (x-4y)(x-y)(x+y). \end{aligned}$$

乘积等于零，当且仅当其中一个因式等于零，所以 $f(x,y) = 0$ 在以下三条直线上成立：

$$x = 4y \text{ (即} y = \tfrac{1}{4}x), \qquad y = x, \qquad y = -x,$$

三条直线全都通过原点。

想一想 为甚么 (ii) 的答案会与 (i) 有关?

当 $y \neq 0$ 时，设 $t = x/y$。那么 $f(x,y) = y^3\,(t^3 - 4t^2 - t + 4)$，也就是 y^3 乘以第 (i) 部分的三次式。该三次式在 $t = -1, 1, 4$ 时等于零，即是在 $x = -y$、$x = y$ 和 $x = 4y$ 上等于零。（当 $y = 0$ 时，$f = x^3$ 只在原点等于零，而原点本来就在三条直线上。）

第 (iii) 部分

三条直线把平面分成六个在原点相接的扇形区域（sector）。由正 x 轴起逆时针量度，六条半直线所指的方向是

$$\arctan \tfrac{1}{4} \approx 14^\circ, \quad 45^\circ, \quad 135^\circ, \quad 194^\circ, \quad 225^\circ, \quad 315^\circ.$$

在一个扇形区域之内，f 没有任何因式等于零，所以 f 在该区域内的正负号保持不变。每越过其中一条直线，恰好有一个因式变号（三条直线互不相同，而且在原点以外每次只会越过一条），所以 f 的正负号由一个扇形区域到下一个扇形区域交替变化。

要确定正负号，可取 $(1,0)$：$f(1,0) = 1 > 0$，而 $(1,0)$ 位于 315° 与 14° 之间的扇形区域内。绕一圈下去，正负号因此是

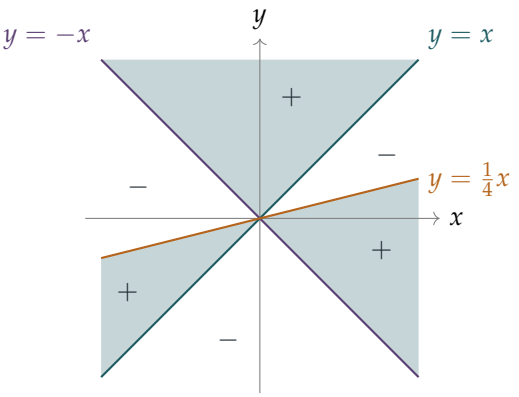
扇形区域（度）	$-45, 14$	$14, 45$	$45, 135$	$135, 194$	$194, 225$	$225, 315$
正负号：f	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

抽样检查一下：$f(0,1) = 4 > 0$ 属于第三栏，$f(-3,-1) = 8 > 0$ 属于第五栏。

所以 $f(x,y) \geq 0$ 在下图三个有阴影的扇形区域上成立，另外还包括全部三条直线（在直线上 $f = 0$）：

- 包含正 x 轴的扇形区域，介乎 $y = -x$（下方）与 $y = \frac{1}{4}x$（上方）之间，其中 $x > 0$;
- 包含正 y 轴的扇形区域，介乎 $y = x$ 与 $y = -x$ 之间，其中 $y > 0$;

- 第三象限内介乎 $y = x$ 与 $y = \frac{1}{4}x$ 之间的狭窄扇形区域。



想一想 为甚么把图形绕原点旋转半圈之后，图形不变，只是阴影部分与空白部分对调？

f 的每一项都是奇数次 3 次，所以 $f(-x,-y) = -f(x,y)$。把一点绕原点旋转 180°，会令 f 的正负号反转，所以每个有阴影的扇形区域的对面都是一个没有阴影的扇形区域。这是检查任何草图的快捷方法：有阴影和没有阴影的扇形区域必须成对地相对，而图中确实如此。

验算

- 在直线 $y = 1$ 上，$f(x,1)$ 正好是第 (i) 部分的三次式，所以 $y = 1$ 上有阴影的部分应该是 $-1 \le x \le 1$ 和 $x \ge 4$。在草图中，$y = 1$ 在 $y = -x$ 与 $y = x$ 之间（由 $x = -1$ 到 $x = 1$）有阴影，并且在它与 $y = \frac{1}{4}x$ 相交之处，即 $x = 4$，再次进入有阴影的扇形区域。
- 在 x 轴上 $f = x^3$，它非负的充要条件是 $x \ge 0$：正 x 轴有阴影，负的一半则没有。
- 数值上，在 2×10^5 个随机点计算 f 的值，其正负号每次都与六个扇形区域的正负号表吻合；例如 $f(1,0) = 1$、$f(0,-1) = -4$、$f(-3,-1) = 8$。

常见错误

- 除以 y^3 之后，在 $y < 0$ 时仍然保留原来的不等号。由于该处 $y^3 < 0$，条件变成 $t^3 - 4t^2 - t + 4 \le 0$，这正是下半平面看起来与上半平面不同的原因。
- 只在 $y > 0$ 时用第 (i) 部分的答案来画阴影，然后完全忘记了 $y < 0$ 的情况。
- 漏掉直线本身：不等式并非严格不等式，所以直线也属于该区域。

STEP 之外

各项次数全部相同的多项式称为齐次（homogeneous）多项式。它的零点集是若干条通过原点的直线的并集，而它的正负号只取决于方向。齐次多项式是射影几何（projective geometry）的起点，在射影几何中，一个点就是一整条通过原点的直线；当你在线性代数（linear algebra）课程中为圆锥曲线（conics）和二次型（quadratic forms）分类时，它们又会再次出现。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 涵盖二次型，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则有更多这种风格的 STEP 题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。