详细解答

STEP III 1994，第 9 题

力学 · 等时曲线与碰撞

STEP III 1994，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s3-q9

本题在 *Beyond STEP* 第 11.4 节等时曲线中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/tautochrone.html

关键思路

沿曲面的能量守恒（energy conservation）给出一个首次积分（first integral），而碗的形状 $y = s^2/(4k)$ 把它化为以弧长（arc-length）s 表示的简谐运动（simple harmonic motion）能量方程。简谐运动的周期与振幅无关，所以每个由静止释放的质点，无论从哪里出发，都在相同的时间后到达 V。正因如此，最后一部分的两个质点必定在 V 相遇，而且一次又一次地相遇。

解答

常数

我们把质点看作光滑曲面上的一个质点模型（point mass）。作用在它身上的力有两个：重量和法向反作用力（normal reaction）。质点由静止出发，所以它的速度一开始并没有垂直于“通过起点和轴的铅垂平面”的水平分量。两个力都没有垂直于该平面的分量（轴对称曲面的反作用力位于通过轴的平面之内），所以质点一直留在这个铅垂截面内。它沿曲线 $s = 2\sqrt{ky}$ 运动，速率为 $|\mathrm{d}s/\mathrm{d}t|$。

曲面是光滑的，所以法向反作用力与速度垂直，不作功。只有重力作功，因此机械能守恒：

$$\tfrac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgy = \text{常数}.$$

乘以 $2/m$ 可见 $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2gy$ 是常数，正如所求。质点在高度 h 由静止释放，故该常数为 $2gh$。

到达 V 所需的时间

在曲线上，$y = s^2/(4k)$。代入后得

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{g}{2k}s^2 = 2gh.$$

对 t 求导，再除以 $2\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$（质点在运动时此步成立），得

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{2k}s,$$

这是关于 s 的简谐运动，其中 $\omega^2 = \dfrac{g}{2k}$，中心在 $s = 0$，即点 V。

想一想 为甚么由释放到抵达 V 的时间是四分之一个周期?

质点由静止从端点位置 $s_0 = 2\sqrt{kh}$ 出发，所以 $s = s_0 \cos \omega t$。当 $\omega t = \frac{\pi}{2}$ 时它首次到达 $s = 0$，这是周期 $2\pi/\omega$ 的四分之一。所以到达 V 所需的时间是

$$T = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2k}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k}{2g}},$$

正如所求。这个结果与 h 无关：这个碗是一条等时曲线（tautochrone）。

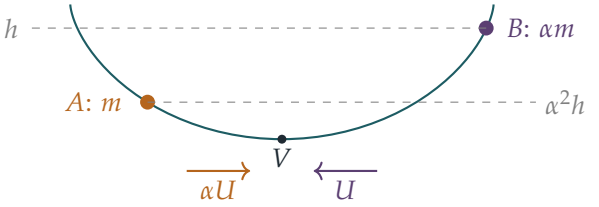
为方便稍后使用，质点在 V 的速率是 ωs_0；或者直接在能量方程中取 $y = 0$，得 $\sqrt{2gh}$。

两个质点

把两个质点看作在 V 正面碰撞的质点。该处的切线是水平的，所以碰撞沿一条水平线发生。把质量为 m 的质点称为质点 A（在高度 $\alpha^2 h$ 释放），把质量为 αm 的质点称为质点 B（在另一侧的高度 h 释放）。

它们在 V 相遇。根据上一部分，每个质点不论起始高度如何，都在时间 T 后到达 V。它们同时释放，所以同时到达 V，并在时间 T 于该处碰撞。

碰撞前一刻的速率。记 $U = \sqrt{2gh}$。由能量方程，A 到达时的速率是 $\sqrt{2g\alpha^2 h} = \alpha U$，$B$ 到达时的速率是 U，两者运动方向相反。取 A 的运动方向为正。



碰撞前的动量是

$$m(\alpha U) + \alpha m(-U) = 0.$$

这就是题目如此选取质量和高度的原因。

第一次碰撞之后。设碰撞后的速度为 v_A 和 v_B。由动量守恒（conservation of momentum）和牛顿实验定律（Newton's experimental law）得

$$mv_A + \alpha m\, v_B = 0, \qquad v_B - v_A = \alpha\big(\alpha U - (-U)\big) = \alpha(1+\alpha)U.$$

由第一条方程得 $v_B = -v_A/\alpha$。代入第二条方程得 $-v_A(1+\alpha)/\alpha = \alpha(1+\alpha)U$，所以

$$v_A = -\alpha^2 U, \qquad v_B = \alpha U.$$

两个速度都反向，并乘以 α。（总动量为零时，相对速度和每个质点各自的速度全都乘以 $-\alpha$。）所以每个质点都沿碗中自己那一侧往回上升。由能量守恒，A 升至高度 $\alpha^4 h$，B 升至高度 $\alpha^2 h$。

规律重复出现。两个质点在同一时刻，即碰撞后时间 T，各自在新的最高点静止下来。然后各自再用时间 T 返回 V。所以它们在时间 $3T$ 再次于 V 碰撞，此时 A 来自高度 $\alpha^4 h$，B 来自高度 $\alpha^2 h$。这正是把 h 换成 $\alpha^2 h$ 之后的初始状况。总动量再次为零，两个速度也再次反向并乘以 α。

由归纳法（induction），第 n 次碰撞在时间 $(2n-1)T$ 于 V 发生，而在这次碰撞之后

$$A \text{ 升至高度} \alpha^{2n+2} h, \qquad B \text{ 升至高度} \alpha^{2n} h,$$

各自留在碗中它出发的那一侧。两个质点在各自的一侧振荡，并在等间隔的时刻 $T, 3T, 5T, \ldots$ 于 V 碰撞。每次碰撞时速率都按因子 α 减小，所以高度按因子 α^2 减小，动能损失的比例为 $1-\alpha^2$。碰撞永不停止，因为相邻两次碰撞的间隔总是 $2T$。振幅按等比方式递减，当 $t \to \infty$ 时两个质点都趋向静止于 V，但不会在有限时间内真正静止在那里。

验算

- 量纲（dimensions）：k 是长度（因为 $s^2 = 4ky$），所以 $\sqrt{k/g}$ 是时间。
- 数值方面,我们对随机选取的 k 和 h 以数值求积法(quadrature)计算了 $\int_0^{s_0} \mathrm{d}s/\sqrt{2g(h-y)}$。取 $k=1$、$g=9.81$ 时，结果是 $0.7092\ldots = \pi\sqrt{1/19.62}$，与 h 无关。
- 我们以数值方法逐步计算两个质点的运动（取 $\alpha = 0.6$ 和 $\alpha = 0.3$），并在每次相遇时应用碰撞定律。碰撞发生在 $t/T = 1, 3, 5, 7$，每次都在 V，而且总动量为零。取 $\alpha = 0.6$ 时，第一次碰撞后的高度是 $0.1296h = \alpha^4 h$ 和 $0.36h = \alpha^2 h$。
- 极限情况 $\alpha \to 1$：质量相等、高度相等，而且是完全弹性碰撞（perfectly elastic），所以每个质点都永远反弹回到起始高度，与预期相符。

常见错误

- 以为 V 距离起点半个周期：质点从振荡的端点出发，所以到 V 只需四分之一个周期。
- 在牛顿定律中忘记方向反转：要使用带正负号的速度，而不只是速率。
- 声称质点在有限次碰撞后静止下来。碰撞之间的时间间隔是固定的，并不会缩短（这与球在地板上弹跳不同），所以有无限多次碰撞，分布在无限长的时间之内。

STEP 之外

内禀方程（intrinsic equation）$s^2 = 4ky$ 描述的是一条摆线（cycloid）。这道题重新发现了惠更斯（Huygens）的等时曲线：在倒置的摆线上，滑到最低点所需的时间与起点无关。惠更斯利用这一点设计出周期与摆幅无关的摆钟。同一条曲线也是最速降线（brachistochrone），即下降最快的曲线，它可用变分法（calculus of variations）求得，而变分法是大学二年级力学的标准课题。想进一步了解振荡和碰撞，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。