详细解答

STEP III 1994，第 8 题

纯数学 · 四平方和恒等式

STEP III 1994，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s3-q8

本题在 *Beyond STEP* 第 7.8 节四个平方数中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/four-squares.html

关键思路

形如 $\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$ 的矩阵 (matrix), 其行列式 (determinant) 为 $zz^* + ww^* = |z|^2 + |w|^2$, 是四个实数平方之和。若把 a, b, c, d 装进一个这样的矩阵，再把 p, q, r, s 装进另一个，则由 $\det(AB) = \det A \det B$ 便得到左边。要做的工夫是证明乘积 AB 具有同样的特殊形式，因为这样它的行列式也是四个平方之和，而这些平方正是 L_i^2。

解答

准备工作

对复数（complex number）z 和 w，记

$$M(z,w) = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}, \qquad \det M(z,w) = zz^* - w(-w^*) = |z|^2 + |w|^2.$$

取

$$z_1 = a + b\mathrm{i}, \quad z_2 = c + d\mathrm{i}, \quad z_3 = p + q\mathrm{i}, \quad z_4 = r + s\mathrm{i}.$$

则

$$\det M(z_1, z_2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \qquad \det M(z_3, z_4) = p^2 + q^2 + r^2 + s^2.$$

乘积具有相同的形式

乘开得

$$M(z_1,z_2)\,M(z_3,z_4)=\begin{pmatrix} z_1z_3-z_2z_4^* & z_1z_4+z_2z_3^* \\ -z_2^*z_3-z_1^*z_4^* & -z_2^*z_4+z_1^*z_3^* \end{pmatrix}.$$

设 $w_1=z_1z_3-z_2z_4^*$ 及 $w_2=z_1z_4+z_2z_3^*$，即第一行的两个元素。由于乘积的共轭（conjugate）等于共轭的乘积，而且 $(z^*)^*=z$，

$$w_1^*=z_1^*z_3^*-z_2^*z_4,\qquad -w_2^*=-z_1^*z_4^*-z_2^*z_3,$$

而这两个正好就是右下角和左下角的元素。所以

$$M(z_1,z_2)\,M(z_3,z_4)=M(w_1,w_2).$$

想一想 乘积具有这个特殊形状，为甚么这样重要?

对一般的 2×2 复矩阵而言，行列式根本不是平方和。正因为乘积仍然是 $M(w_1,w_2)$ 的形式，它的行列式才是 $|w_1|^2+|w_2|^2$，从而可拆成四个实数平方。

取行列式

利用 $\det(AB)=\det A\,\det B$，

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)=\det M(w_1,w_2)=|w_1|^2+|w_2|^2.$$

余下只须求出 w_1 和 w_2 的实部（real part）和虚部（imaginary part）：

$$\begin{aligned} w_1&=(a+b\mathrm{i})(p+q\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})(r-s\mathrm{i})\\ &=\big[(ap-bq)+(aq+bp)\mathrm{i}\big]-\big[(cr+ds)+(dr-cs)\mathrm{i}\big]\\ &=(ap-bq-cr-ds)+(aq+bp+cs-dr)\mathrm{i},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2&=(a+b\mathrm{i})(r+s\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})(p-q\mathrm{i})\\ &=\big[(ar-bs)+(as+br)\mathrm{i}\big]+\big[(cp+dq)+(dp-cq)\mathrm{i}\big]\\ &=(ar-bs+cp+dq)+(as+br-cq+dp)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

因此可取

$$L_1=ap-bq-cr-ds,\qquad L_2=aq+bp+cs-dr,$$
$$L_3=ar-bs+cp+dq,\qquad L_4=as+br-cq+dp,$$

于是 $|w_1|^2+|w_2|^2=L_1^2+L_2^2+L_3^2+L_4^2$，得出

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)=L_1^2+L_2^2+L_3^2+L_4^2.$$

每个 L_i 都是若干项之和，每项的形式为（a,b,c,d 中的一个字母）$\times$（p,q,r,s 中的一个字母），所以它对两组变量分别都是线性（linear）的，符合题目要求。（答案并不唯一：改变任何 L_i 的正负号，或以不同方式选取 z_j，都会得出其他合用的组合。）

验算

- 取 $(a,b,c,d)=(1,2,3,4)$ 及 $(p,q,r,s)=(5,6,7,8)$。左边为 $30\times 174=5220$。由公式得 $(L_1,L_2,L_3,L_4)=(-60,12,30,24)$，而 $3600+144+900+576=5220$。
- 设 $c=d=r=s=0$。则 $L_3=L_4=0$，恒等式（identity）简化为 $(a^2+b^2)(p^2+q^2)=(ap-bq)^2+(aq+bp)^2$，即由 $|z_1z_3|=|z_1||z_3|$ 得出的二平方和恒等式。
- 电脑验算已就八个变量的 20,000 组随机有理数取值，确认恒等式精确成立，并以数值方式确认了 $M(z_1,z_2)M(z_3,z_4)=M(w_1,w_2)$。

常见错误

- 相乘时忘记第二行的共轭，以致破坏了乘积的特殊形式。
- $(c+d\mathrm{i})(r-s\mathrm{i})$ 中的正负号出错：$-ds\,\mathrm{i}^2$ 一项会变成 $+ds$。

STEP 之外

这就是欧拉（Euler）四平方和恒等式。矩阵 $M(z,w)$ 是哈密顿（Hamilton）四元数（quaternion）的一个具体模型：它们在乘法下封闭（closed），而行列式就是“长度”的平方，具有可乘性（multiplicative）。这个恒等式是拉格朗日（Lagrange）定理（每个正整数都是四个平方之和）证明中的关键一步，因为它把问题归结为质数（prime）的情况。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本数论入门经典）涵盖平方和的课题，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以几何观点讲解复分析）则为二平方和的情况提供几何直观。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。